Klassifikation symmetrischer stabiler Räume

Von der Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät der
Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte
Dissertation

von Holger Kubiak
geboren am 31. Juli 1977
in Braunschweig

Eingereicht am:	04.09.2008
Mündliche Prüfung am:	23.10.2008
Referent:	Prof. Dr. Harald Löwe
Korreferent:	Prof. Dr. Markus Stroppel

2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **3**

1 Grundlegendes **5**

2 Symmetrische stabile Räume **10**
2.1 Stabile Räume 10
2.2 Symmetrische Räume 12
2.3 Symmetrische stabile Räume 16

3 Lie-Tripel-Geometrien **26**
3.1 Allgemeines 26
3.2 Ideale und die Standardeinbettung 31
3.3 Riemannsche Lie-Tripel-Systeme 35
3.4 Lie-Tripel-Geometrien 36
3.4.1 Definitionen 36
3.4.2 Klassische Lie-Tripel-Geometrien 41
3.4.3 Lie-Tripel-Geometrien vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ 49
3.4.4 Ebene Lie-Tripel-Geometrien 54
3.4.5 Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ 57
3.4.6 Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$ 58

4 Klassifikation **61**
4.1 Grobe Klassifikation von Lie-Tripel-Geometrien 61
4.2 Geometrisch zerfallende Lie-Tripel-Geometrien 72
4.3 Einfache Lie-Tripel-Geometrien 75
4.3.1 Standardeinbettung $\mathfrak{u}_4(\mathbb{H}, r), r = 0, 1, 2$ 81
4.3.2 Standardeinbettung $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ 83
4.3.3 Zusammenfassung 89
4.4 Lie-Tripel-Geometrien höheren Ranges 90
4.5 Symmetrische stabile Räume 93

Einleitung

Beginnt man eine genauere Betrachtung der projektiven Ebenen über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$, so studiert man ggf. offene Untergeometrien. Im Laufe der Zeit wurden diese auf unterschiedliche Weise untersucht. In [18] definierte Löwen symmetrische Ebenen, von denen wir uns die für uns wichtigen vorstellen können als offene Teilgeometrien der oben genannten projektiven Ebenen, bei denen an jedem Punkt der Geometrie eine Spiegelung existiert, die die Struktur der Geometrie erhält.

Mit dieser Definition vereinte Löwen den Begriff der stabilen Ebene, der das Konzept der offenen Teilgeometrie einer projektiven Ebene enthält, mit dem Begriff des symmetrischen Raumes, der die Existenz der Spiegelungen an jedem Punkt sicherstellt.

In seinen Arbeiten untersuchte Löwen symmetrische Ebenen. Eine vollständige Klassifikation gelang ihm für reelle und komplexe Ebenen.

Durch Klein wurden die Resultate von Löwen auch auf geometrisch höherdimensionale Objekte, auf symmetrische stabile Räume, übertragen [10]. Mit einem Einbettungssatz von Groh nutzte er dafür aus, dass viele stabile Räume offene Teilgeometrien eines passenden projektiven Raumes ist.

Löwe, ein Mitglied der Arbeitsgruppe um Löwen, beschäftigte sich mit den Ebenen über $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$. In [17] erreichte er eine Klassifikation der zusammenhängenden symmetrischen Ebenen in diesen Fällen. Kubiak erreichte in [12] das Klassifikationsziel auch für unzusammenhängende symmetrische Ebenen.

Die Resultate von Löwen sind somit an zwei Parametern verallgemeinert und es stehen jeweils Klassifikationen zur Verfügung.

In dieser Arbeit wollen wir die Verallgemeinerungen zusammenführen. Wir betrachten symmetrische stabile Räume, deren geometrische Dimension und deren Geradendimension beide größer als zwei sein dürfen.

Die Arbeit ist in vier Abschnitte unterteilt. Im Abschnitt 1 erläutern wir im Wesentlichen lediglich unsere Notationen und führen ein paar später auftauchende Begriffe ein, die wir für das Projekt benötigen.

Im Abschnitt 2 definieren wir die stabilen und symmetrischen Räume und vereinen danach die Definitionen zu symmetrischen stabilen Räumen. Wir geben viele Eigenschaften, die über symmetrische Räume bereits bekannt sind, an und übertragen diese Eigenschaften auf symmetrische stabile Räume.

Im Abschnitt 3 werden wir uns den Tangentialraum eines symmetrischen stabilen Raumes genauer anschauen. Die symmetrische Stuktur lässt uns eine Struktur auf dem Tangentialraum definieren, die uns an Lie-Algebren erinnert. Einige der in diesem Abschnitt genannten Sätze spiegeln dies wider. Zur Vorbereitung des darauf folgenden Abschnittes zitieren wir in diesem Abschnitt viele der bekannten Resultate aus den o.g. Klassifikationen.

Im Abschnitt 4 werden wir die eigentliche Klassifikation durchführen. Dafür werden wir die Tangentialsysteme genauer untersuchen. Nach einer groben Einteilung dieser betrachten wir die interessanteren Fälle intensiver. Am Ende des Abschnittes werden wir die Resultate, die wir für die Tangentialsysteme erarbeitet haben, auf die symmetrischen stabilen Räume übertragen und können somit einen Klassifikationssatz angeben:

Jeder symmetrische stabile Raum kommt von einer Sesquilinearform oder ist vom Typ $(R+)$ *oder* $(R-)$.

1 Grundlegendes

Mit $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ werden die Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen und der Körper der Quaternionen bezeichnet. Mit $\mathbb{O}$ bezeichnen wir die Divisionsalgebra der Oktaven. Wenn wir nichts anderes angeben, so ist $\mathbb{K}$ immer einer der Körper $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$.

Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ bezeichnen wir die komplexe bzw. quaterniale Konjugation mit $\kappa_{\mathbb{K}}$. Wenn keine Missverständnisse auftreten, so kürzen wir dies zu κ. Statt $\kappa(\alpha)$ nutzen wir auch die übliche Notation $\overline{\alpha}$. Der Einfachheit halber schreiben wir auch bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Abbildung κ und meinen damit die Identität.

Die von uns genutzten Vektorräume über den oben genannten Körpern sind grundsätzlich Rechts-Vektorräume.

Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ bezeichnen wir die Menge der $\mathbb{K}$-Unterräume von $\mathbb{K}^{n+1}$ als ***projektiven Raum*** $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ der Dimension n. Die Inzidenz ist durch die Inklusion gegeben. Die eindimensionalen Unterräume heißen Punkte, die zweidimensionalen Geraden, die dreidimensionalen Ebenen und die n-dimensionalen Hyperebenen.

Je zwei Punkte lassen sich durch eine Gerade verbinden. Mit der Dimensionsformel sieht man ein: Zwei Geraden, die in einer Ebene liegen, schneiden sich in genau einem Punkt.

Ein Punkt heißt ***Zentrum*** einer Abbildung eines projektiven Raumes in sich, wenn jede Gerade durch den Punkt von der Abbildung festgehalten wird. Dual dazu heißt eine Hyperebene ***Achse*** einer Abbildung eines projektiven Raumes in sich, wenn jeder Punkt der Hyperebene fixiert wird.

Sind V und W jeweils endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, so ist eine ***Sesquilinearform*** eine Abbildung $f : V \times W \to \mathbb{K}$, die im ersten Argument semilinear und im zweiten Argument linear ist, d.h. es gibt einen stetigen Antiautomorphismus κ_f von $\mathbb{K}$, so dass für alle $x, y \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ die Gleichung $f(x\alpha, y\beta) = \kappa_f(\alpha) f(x, y)\beta$ gilt.

Für uns ist nur der Fall $V = W$ interessant. Obwohl einige der folgenden Begriffe auch allgemein definiert werden können, definieren wir sie nur für unseren speziellen Fall. Allgemeinere Überlegungen findet man zum Beispiel in den Algebra-Werken von Bourbaki [2].

Im Falle $V = W$ heißt die Sesquilinearform f

- ***symmetrisch***, falls $f(x, y) = f(y, x)$ für alle $x, y \in V$ gilt,

- ***hermitesch***, falls $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$ für alle $x, y \in V$ gilt und
- ***schief-hermitesch***, falls $\kappa_f \neq \kappa_{\mathbb{K}}$ und für alle $x, y \in V$ die Gleichung $f(x,y) = \kappa_f(f(y,x))$ gilt.

In $\mathbb{R}$ gibt es keine nicht-trivialen Antiautomorphismen. Demnach gibt es keine schief-hermiteschen Sesquilinearformen in $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Die Begriffe hermitesch und symmetrisch sind hier identisch. In $\mathbb{C}$-Vektorräumen fallen die Begriffe symmetrisch und schief-hermitesch zusammen, da id der einzige stetige Antiautomorphismus ungleich der komplexen Konjugation ist. Es sei f eine symmetrische Sesquilinearform auf einem $\mathbb{H}$-Vektorraum. An der Gleichungskette $f(x,y)\alpha = f(y,x)\alpha = f(y,x\alpha) = f(x\alpha,y) = \kappa_f(\alpha)f(x,y)$ erkennen wir durch Einsetzen von $\alpha := f(x,y)$, dass $\kappa_f(f(x,y)) = f(x,y)$ gelten muss. Gilt $f \neq 0$, so erhalten wir aus der Linearität im zweiten Argument von f die Information $\kappa_f = \mathrm{id}$. Da id kein Antiautomorphismus von $\mathbb{H}$ ist, muss die Sesquilinearform f demnach verschwinden und ist somit hermitesch.

Wegen dieser Überlegungen gibt es im Wesentlichen nur folgende Typen von Sesquilinearformen: hermitesche auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum, symmetrische auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum und schief-hermitesche auf einem $\mathbb{H}$-Vektorraum. Wir werden häufig „(schief)-hermitesche oder symmetrische Sesquilinearform“ schreiben und meinen damit eine dieser Formen.

Zwei Sesquilinearformen $f : V \times V \to \mathbb{K}$ und $g : W \times W \to \mathbb{K}$ heißen ***äquivalent***, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$ gibt, so dass für alle $x, y \in V$ die Gleichung $f(x,y) = g(\varphi(x), \varphi(y))$ erfüllt ist. Insbesondere sind dann V und W gleichdimensional.

Das ***Radikal*** einer Sesquilinearform f definieren wir durch

$$\mathrm{rad}(f) = \{y \in V \,:\, f(x,y) = 0 \text{ für alle } x \in V\}.$$

Der Linearität von f im zweiten Argument entnehmen wir, dass das Radikal ein Untervektorraum ist.

Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen ***orthogonal*** bzgl. einer Sesquilinearform f, falls $f(x,y) = 0$ gilt.

Mit dieser Definition kommen wir zum ersten Satz dieser Arbeit.

1.1 Satz
Zu jeder (schief)-hermiteschen oder symmetrischen Sesquilinearform existiert eine orthogonale Basis.

Beweis. Wir verweisen auf [3, Ch. I, §8]. □

Ist f eine schief-hermitesche $\mathbb{H}$-Sesquilinearform mit Begleitantiautomorphismus

$\kappa_f(x) = \alpha^{-1}\overline{x}\alpha$, so kann durch die Transformation $h(x,y) := i^{-1}\alpha f(x,y)$ eine schief-hermitesche Sesquilinearform h mit Antiautomorphismus $\kappa_h(x) = i^{-1}\overline{x}i$ erreicht werden. Diesen Antiautomorphismus bezeichnen wir auch als κ_i. Natürlich ist die Matrix einer (schief)-hermiteschen oder symmetrischen Sesquilinearform bzgl. einer passenden orthogonalen Basis eine Diagonalmatrix. Durch eine Normierung der Basisvektoren, die an der Eigenschaft der Orthogonalität nichts verändert, erhalten wir, dass die Einträge der Diagonalmatrix der Sesquilinearform im hermiteschen Fall aus der Menge $\{1,0,-1\}$, im $\mathbb{C}$-symmetrischen Fall aus der Menge $\{1,0\}$ und im schief-hermiteschen Fall ebenfalls aus der Menge $\{1,0\}$ gewählt werden können. Eine so gewählte Situation bezeichnen wir als Normalform der Sesquilinearform.

Wir betrachten nun Abbildungen, die mit einer Sesquilinearform verträglich sind. Die Gruppe der bzgl. einer Sesquilinearform f ***unitären Abbildungen*** eines Vektorraumes V ist

$$\mathrm{U}(f,V) = \{T \in \mathrm{GL}(V) \,:\, f(Tx,Ty) = f(x,y) \text{ für alle } x,y \in V\}.$$

Die Wirkung von unitären Abbildungen auf dem Radikal einer Sesquilinearform ist im Grunde genommen egal. Um eine gewisse Eindeutigkeit zu erhalten, definieren wir die engere Gruppe der bzgl. einer Sesquilinearform f unitären Abbildungen eines Vektorraumes V als

$$\mathrm{U}^*(f,V) = \left\{T \in \mathrm{U}(f,V) \,:\, T|_{\mathrm{rad}(f)} = \mathrm{id}_{\mathrm{rad}(f)}\right\}.$$

Für die Fortsetzbarkeit von unitären Abbildungen, die nur auf Unterräumen definiert sind, nutzen wir den Satz von Witt. Dieser lautet in der für uns günstigen Form:

1.2 Satz
Es seien f eine (schief-)hermitesche oder symmetrische Sesquilinearform auf V und $U_1, U_2 \leq V$ Unterräume mit $U_1 \cap \mathrm{rad}(f) = U_2 \cap \mathrm{rad}(f) = 0$. Zusätzlich sei $\varphi : U_1 \to U_2$ eine unitäre Abbildung bzgl. f. Dann existiert eine Fortsetzung $\Phi \in \mathrm{U}^*(f,V)$ von φ.

Beweis. Für Sesquilinearformen mit verschwindendem Radikal findet man den Satz in [2, §4, Abschnitt 3]. Bei nicht-trivialem Radikal setzt man eine Fortsetzung als Identität fort. Genauer:

Es sei $U \leq V$ ein Vektorraum-Komplement von $\mathrm{rad}(f)$ mit $U_1 \leq U$. Wegen $U \cap \mathrm{rad}(f) = 0$ ist φ nach dem im letzten Absatz zitierten Satz auf U unitär fortsetzbar. Die Fortsetzung heiße $\widetilde{\varphi}$. Die Abbildung $\Phi : U \oplus \mathrm{rad}(f) \to V, (u,r) \mapsto \widetilde{\varphi}(u) + r$ ist eine Fortsetzung von φ mit $\Phi \in \mathrm{U}^*(f,V)$. □

Darstellungen

Eine ***Darstellung*** φ einer Gruppe G auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum ist ein Homomorphismus $G \to \Gamma\mathrm{L}(V)$, wobei $\Gamma\mathrm{L}(V)$ die Gruppe der semilinearen bijektiven Abbildungen $V \to V$ bezeichnet. Wir schreiben in diesem Falle auch von einer ***$\mathbb{K}$-linearen*** Darstellung. Eine Darstellung heißt ***irreduzibel***, wenn $\varphi(G)(U) \subseteq U$ nur für die Unterräume $U = 0$ und $U = V$ gilt. Für eine Klassifikation der Darstellungen einfacher Lie-Gruppen mit geringer Dimension auf reellen Vektorräumen kleiner Dimension verweisen wir auf [24, 95.10]. Ein ***irreduzibler Unterraum*** ist ein Unterraum U, so dass die Einschränkung der Elemente von $\varphi(G)$ auf U eine irreduzible Darstellung von G auf U ergeben. Die Darstellung heißt ***vollständig reduzibel***, falls V Summe von irreduziblen Unterräumen ist.

Eine $\mathbb{C}$-lineare Darstellung ist gleichzeitig eine $\mathbb{R}$-lineare Darstellung. Wir sprechen in diesem Fall nur von der $\mathbb{C}$-Linearität. Entsprechendes gilt auch für $\mathbb{H}$. Die Umkehrung der Aussage gilt im Allgemeinen nicht. Wir können allerdings zeigen:

1.3 Satz
Es seien φ_1, φ_2 Darstellungen einer Gruppe G auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit $n \geq 1$. Die Darstellungen seien $\mathbb{C}$-linear. Durch $(\varphi_1 + \varphi_2)(g)(u + vj) := \varphi_1(g)(u) + \varphi_2(g)(v)j$ ist eine Darstellung $\varphi_1 + \varphi_2$ der Gruppe G auf $\mathbb{H}^n$ gegeben. Ist die Darstellung $\varphi_1 + \varphi_2$ sogar $\mathbb{H}$-linear, so gilt $\varphi_1 = \varphi_2$.

Ein entsprechender Satz gilt auch für den Fall, dass wir die Körper $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ durch $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ersetzen.

Beweis. Es ist klar, dass $\varphi_1 + \varphi_2$ mit der im Satz angegebenen Definition eine Darstellung ist. Zu zeigen ist lediglich die etwaige Gleichheit von φ_1 und φ_2. Dazu schreiben wir die Bedingung, dass die Darstellung $\mathbb{H}$-linear ist, aus. Für jedes $a + bj, u + vj \in \mathbb{H}$ und $g \in G$ gilt demnach

$$\begin{aligned}
& \varphi_1(g)(u) \cdot a - \varphi_2(g)(v) \cdot \overline{b} + \left(\varphi_1(g)(u) \cdot b + \varphi_2(g)(v) \cdot \overline{a}\right) j \\
= \; & \left(\varphi_1(g)(u) + \varphi_2(g)(v)j\right)(a + bj) \\
= \; & \left((\varphi_1 + \varphi_2)(g)(u + vj)\right)(a + bj) \\
= \; & (\varphi_1 + \varphi_2)(g)\left((u + vj)(a + bj)\right) \\
= \; & (\varphi_1 + \varphi_2)(g)(ua - v\overline{b} + (ub + v\overline{a})j) \\
= \; & \varphi_1(g)(ua - v\overline{b}) + \varphi_2(g)(ub + v\overline{a})j \\
= \; & \varphi_1(g)(u) \cdot a - \varphi_1(g)(v) \cdot \overline{b} + \left(\varphi_2(g)(u) \cdot b + \varphi_2(v) \cdot \overline{a}\right) j.
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle a, b, u, v, g gilt, erhalten wir im Anteil aus $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$ die Gleichung $\varphi_1(g)(u) \cdot a - \varphi_2(g)(v) \cdot \overline{b} = \varphi_1(g)(u) \cdot a - \varphi_1(g)(v) \cdot \overline{b}$, woraus wir das Resultat $\varphi_1 = \varphi_2$ ablesen.

Die Aussage für die Körperkombination $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ kann analog bewiesen werden: Aus j wird i, die Konjugation wird durch die Identität ersetzt. $\square$

Diesem Satz entnehmen wir, dass wir aus jeder $\mathbb{C}$-linearen Darstellung eine $\mathbb{H}$-lineare Darstellung konstruieren können. Wir werden später an den $\mathbb{H}$-linearen Darstellungen auf $\mathbb{R}^{16}$ interessiert sein. Aus dem letzten Satz können wir direkt folgern:

1.4 Satz
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und φ eine $\mathbb{H}$-lineare Darstellung auf $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{4n}$. Der $\mathbb{R}$-Untervektorraum $U \leq \mathbb{R}^{4n} = \mathbb{H}^n$ sei ein irreduzibler Unterraum, auf dem die Darstellung $\mathbb{K}$-linear sei. Dann ist $\mathrm{span}_{\mathbb{H}}(U) = U^k$ mit $k = 4/\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$ und die Darstellung auf U^k ist eine k-fache Summe der Darstellung auf U.

Quaternionen

Für unsere späteren Rechnungen benötigen wir einige Kenntnisse über $\mathbb{H}$. Wir empfehlen [4] und die ersten Seiten von [24], wo wir einen Teil der im Folgenden gezeigten Aussagen finden. Zunächst erinnern wir daran, dass alle Automorphismen von $\mathbb{H}$ innere Automorphismen sind. Es gilt $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \mathrm{SO}(3)$. Die $\mathrm{SO}(4)$ ist isomorph zur Gruppe der Abbildungen der Form $x \mapsto axb$ mit $||a|| = ||b|| = 1$. Im folgenden Satz untersuchen wir einige dieser Abbildungen.

1.5 Satz
Es seien $a, b \in \mathbb{H}$ mit $a^2 = b^2 = -1$. Die Abbildung

$$\mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad x \mapsto axb$$

ist eine $\mathbb{R}$-lineare Involution. Die Eigenräume sind (reell) zweidimensional.

Beweis. Die Abbildung heiße φ. Offensichtlich ist φ eine $\mathbb{R}$-lineare Involution. Demnach zerfällt $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ in eine direkte Summe von Eigenräumen zum Eigenwert 1 und -1. Nach dem oben genannten ist die Abbildung in einer $\mathrm{SO}(4)$ enthalten. Dies bedeutet, dass der Eigenraum zum Eigenwert -1 gerade Dimension hat. Gilt $a \neq \pm b$, so erkennen wir, dass a weder Eigenvektor zum Eigenwert 1 noch Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist. Insbesondere gilt somit $\varphi \neq \pm\mathrm{id}$ und die Eigenräume sind zweidimensional. Im Falle $a = \pm b$ sehen wir direkt, dass $\varphi \neq \pm\mathrm{id}$ gilt und erhalten die gleiche Folgerung. $\square$

2 Symmetrische stabile Räume

In diesem Teil der Arbeit werden wir symmetrische stabile Räume einführen. Ein solcher Raum ist ein symmetrischer Raum, der gleichzeitig auch ein stabiler Raum ist. Diese drei Begriffe werden wir definieren und einige Eigenschaften solcher Räume nennen. Insbesondere bei den symmetrischen stabilen Räumen geben wir Beispiele an.

2.1 Stabile Räume

Wir beginnen mit stabilen Räumen. Dies sind Geometrien, bei denen die Operationen des Schneidens oder Verbindens von Objekten gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllen.

Wir wählen den Zugang aus [6], in welchem Verbandstheorie genutzt wird. Ein Vorteil an diesem Zugang liegt darin, dass wir dadurch problemlos aus [10] zitieren können.

Nach bekannten Resultaten aus der Verbandstheorie (siehe z.B. [8]) können wir einen Verband $(\mathcal{M}, \vee, \wedge)$ auch als halbgeordneten Verband $(\mathcal{M}, \leq)$ betrachten. Hierbei gilt $x \leq y \iff x \vee y = y$. Gilt dabei $x \neq y$, so schreiben wir auch einfach $x < y$. Sind $x < y$ direkte Nachbarn, d.h. aus $x \leq z \leq y$ folgt $z \in \{x, y\}$, so schreiben wir $x \prec y$. Wir werden die Zeichen $\vee, \wedge, \leq, <, \prec$ nutzen, ohne dabei immer zu erwähnen, dass sie alle zu dem betrachteten Verband gehören sollen.

2.1 Definition
Ein Verband $(\mathcal{M}, \leq)$ heißt ***geometrischer Verband vom Rang*** n, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Es existiert ein kleinstes Element $0 \in \mathcal{M}$.
- Es existiert ein größtes Element $1 \in \mathcal{M}$.
- Es existiert eine maximale Kette $0 \prec x_0 \prec \ldots \prec x_{n-1} \prec 1$ der Länge $n + 2$.
- $\mathcal{M}$ ist atomar:
$$\forall x \in \mathcal{M} : x = \sup\{y < x \, : \, 0 \prec y\}.$$
- $\mathcal{M}$ ist semimodular:
$$\forall x, y \in \mathcal{M} : (x \wedge y \prec x, y \Rightarrow x, y \prec x \vee y) \, .$$

Aus den Bedingungen folgt für jedes $x \in \mathcal{M}$ die Existenz eines $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $[0, x] = \{y \in \mathcal{M} \, : \, y \leq x\}$ ein geometrischer Verband vom Rang k ist. Wir bezeichnen k als Rang von x und schreiben dafür $\operatorname{rg} x$.

Mit $\mathcal{M}_k$ bezeichnen wir die Menge aller Elemente vom Rang k und erhalten dadurch $\mathcal{M}$ als disjunkte Vereinigung von $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_{n-1}, \{0,1\}$. Die Elemente von $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_{n-1}$ bezeichnen wir als Punkte, Geraden bzw. Hyperebenen. Alle Elemente von $\mathcal{M} \setminus \{0\}$ bezeichnen wir als geometrische Objekte.

Für $i, j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definieren wir

$$^k(\mathcal{M}_i \times \mathcal{M}_j) := \{(x,y) \in \mathcal{M}_i \times \mathcal{M}_j \,:\, \mathrm{rg}(x \vee y) = k\}\,,$$

$$_k(\mathcal{M}_i \times \mathcal{M}_j) := \{(x,y) \in \mathcal{M}_i \times \mathcal{M}_j \,:\, \mathrm{rg}(x \wedge y) = k\}\,.$$

Ein geometrischer Verband heißt ***stabiler Raum***, wenn es Topologien auf $\mathcal{M}_k$ derart gibt, dass alle $_{j-1}(\mathcal{M}_j \times \mathcal{M}_{n-1})$ offen in $\mathcal{M}_j \times \mathcal{M}_{n-1}$ sind und die Abbildungen

$$\begin{aligned} ^{j+1}\vee &\;:\; ^{j+1}(\mathcal{M}_j \times \mathcal{M}_0) \to \mathcal{M}_{j+1}, \\ _{j-1}\wedge &\;:\; _{j-1}(\mathcal{M}_j \times \mathcal{M}_{n-1}) \to \mathcal{M}_{j-1} \end{aligned}$$

stetig sind. Ein stabiler Raum vom Rang 2 wird als ***stabile Ebene*** bezeichnet.

Ein stabiler Raum vom Rang n heißt ***reichhaltig***, wenn jede Gerade mindestens drei Punkte enthält, die Punktmenge nicht diskret ist und $n \geq 2$ gilt.

Der projektive Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, also die Menge $\mathcal{M}$ aller Untervektorräume von $\mathbb{K}^{n+1}$, ist ein geometrischer Verband vom Rang n. Die Mengen $\mathcal{M}_k$ bestehen aus den $(k+1)$-dimensionalen Unterräumen. Es gilt $0 = \{0\}, 1 = \mathbb{K}^{n+1}$. Versehen mit der euklidischen Topologie ist $\mathcal{M}$ ein stabiler Raum (vgl. [6]). Die Stetigkeitsbedingungen sagen hier aus, dass das Verbinden eines beliebigen Objektes mit einem Punkt außerhalb dieses Objektes und das Schneiden eines beliebigen Objektes mit einer das Objekt schneidenden Hyperebene stetige Abbildungen sind. Durch wiederholtes Schneiden mit verschiedenen Hyperebenen sehen wir ein, dass das Schneiden mit Unterräumen beliebiger Größe stetig ist. Eine entsprechende Aussage gilt für das Verbinden mit Unterräumes des projektiven Raumes, indem man nacheinander mit verschiedenen Punkten verbindet.

2.2 Definition
Es sei $\mathcal{M}$ ein stabiler Raum und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$. Ist $\mathcal{N}$ mit den induzierten Abbildungen ein stabiler Raum, so heißt $\mathcal{N}$ ein ***stabiler Unterraum*** von $\mathcal{M}$.

Aus bekannten stabilen Räumen können wir verschiedene Unterräume konstruieren.

2.3 Beispiel 1. Gegeben sei ein stabiler Raum $\mathcal{M}$ vom Rang n. Wir betrachten eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathcal{M}_0$. Die Struktur $\mathcal{N}$ enthalte $0 \in \mathcal{M}$ und alle

Elemente von $m \in \mathcal{M}$, für die ein $n \in U$ mit $n \leq m$ existiert. Das Verbinden $\vee$ definieren wir auf $\mathcal{N}$ genauso wie auf $\mathcal{M}$. Falls für $x, y \in \mathcal{N}$ der in $\mathcal{M}$ berechnete Schnitt $x \wedge_{\mathcal{M}} y$ in $\mathcal{N}$ liegt, so definieren wir $x \wedge_{\mathcal{N}} y := x \wedge_{\mathcal{M}} y$. Andernfalls setzen wir $x \wedge_{\mathcal{N}} y := 0$. Nach [6] ist die Menge $\mathcal{N}$ ein stabiler Raum.

2. Wenden wir die Konstruktion im letzten Beispiel auf projektive Räume an, so erkennen wir, dass offene Teilmengen von projektiven Räumen stabile Räume sind.

3. Es sei $\mathcal{M}$ ein stabiler Raum und $x \in \mathcal{M}$. Die Menge

$$[0, x] = \{y \in \mathcal{M} \,:\, y \leq x\}$$

ist ein stabiler Unterraum vom Rang rg x. Solche stabile Räume bezeichnen wir als ***Untergeometrien*** von $\mathcal{M}$.

4. Es sei $\mathcal{M}$ ein stabiler Raum und $x \in \mathcal{M}$. Die Menge

$$[x, 1] = \{y \in \mathcal{M} \,:\, x \leq y\}$$

ist ein stabiler Unterraum vom Rang rg $\mathcal{M} -$ rg x.

Unser genauer ausgeführtes Beispiel für stabile Räume war der projektive Raum. Auch offenen Teilmengen davon sind stabile Räume. Mit einer Zusatzbedingung kann man den Groh'schen Einbettungssatz beweisen, der aussagt, dass fast alle Beispiele in etwa so aussehen.

2.4 Satz
Es sei $\mathcal{M}$ ein reichhaltiger stabiler Raum vom Rang $n \geq 3$ mit lokalkompakter, zusammenhängender Punktmenge. Dann ist $\mathcal{M}$ isomorph zu einer offenen Teilmenge eines n-dimensionalen projektiven Raumes über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

Beweis. Wir verweisen auf [6, 2.10] bzw. [5, Main Theorem, Seite 127] □

Mit dieser Kennzeichnung der stabilen Räume schließen wir den Abschnitt über Räume dieses Typs.

2.2 Symmetrische Räume

Als nächstes betrachten wir Räume, die für jeden Punkt eine Punktspiegelung besitzen. Umfangreiche Untersuchungen dieses Themas findet man in [20]. Wir geben an dieser Stelle einige der dort bewiesenen Resultate wieder.

Für topologische Räume M bezeichnen wir eine Involution $M \to M$ mit isoliertem Fixpunkt $o \in M$ als ***Spiegelung*** an o.

2.5 Definition
Es sei M eine endlichdimensionale Mannigfaltigkeit und $\{s_x : x \in M\}$ eine Menge von Bijektionen von M mit den folgenden Eigenschaften:

- Für alle $x \in M$ ist s_x eine Spiegelung an x.
- Für alle $x, y \in M$ gilt $s_x \circ s_y \circ s_x = s_{s_x(y)}$.
- Die Abbildung $M \times M \to M, (x, y) \mapsto x \cdot y := s_x(y)$ ist glatt.

Dann heißt das Paar $(M, \{s_x : x \in M\})$ ***symmetrischer Raum***. Wählen wir ein Element $o \in M$, so nennen wir (M, o) einen ***symmetrischen Raum mit Basispunkt***.

Ein ***Homomorphismus*** von symmetrischen Räumen $(M, \{s_x\})$ und $(N, \{t_y\})$ ist eine glatte Abbildung $\varphi : M \to N$ mit $\varphi \circ s_x = t_{\varphi(x)} \circ \varphi$. Begriffe wie Isomorphismus und Automorphismus werden wie üblich erklärt.

Diese Definition verträgt sich mit der Definition aus [17]. Unsere Eigenschaft $s_x \circ s_y \circ s_x = s_{s_x(y)}$ lässt sich in $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$ umformen. Als Produkt geschrieben bedeutet dies $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$ für alle $x, y, z \in M$. Damit ist die Äquivalenz zu den Definitionen aus [20] und [10] klar.

Beispiele von symmetrischen Räumen erhalten wir aus Lie-Gruppen G: Für $x, y \in G$ setzen wir $s_x(y) = xy^{-1}x$. Die geforderten Bedingungen sind offensichtlich erfüllt. Weitere Beispiele findet man in [20] und weiter hinten in diesem Text.

Um die Struktur der symmetrischen Räume näher kennenzulernen, empfiehlt sich eine Untersuchung der Spiegelungen. Zunächst stellen wir direkt durch Anschauen der Definitionen fest:

2.6 Satz
Die Spiegelungen eines symmetrischen Raumes sind Automorphismen.

Betrachtet man das Produkt zweier Spiegelungen in unserem Beispiel mit Lie-Gruppen, so sieht man, dass die Menge der Spiegelungen im Allgemeinen keine Gruppe bildet. Erfolgsbringend ist die Betrachtung derjenigen Gruppe, die von Produkten von je zwei Spiegelungen erzeugt wird.

2.7 Definition
Es sei $(M, \{s_x\})$ ein symmetrischer Raum. Die von $\{s_x s_y : x, y \in M\}$ erzeugte Untergruppe der Automorphismengruppe des symmetrischen Raumes M heißt ***Bewegungsgruppe***. Wir bezeichnen sie oft mit Σ.

Zunächst zitieren wir ein Resultat, das es uns ermöglicht, Lie-Theorie bei der

Arbeit mit der Bewegungsgruppe anzuwenden.

2.8 Satz
Automorphismengruppen und Bewegungsgruppen von symmetrischen Räumen lassen sich derart mit einer differenzierbaren Struktur versehen, dass sie Lie-Transformationsgruppen sind.

Beweis. Wir verweisen auf [20, 2.8.a) und 2.8.b) auf Seite 88]. □

Zur Untersuchung der Bewegungsgruppe nehmen wir Standgruppen zu Hilfe. Durch eine kurze Rechnung können wir beweisen:

2.9 Satz
Es sei M ein symmetrischer Raum mit Bewegungsgruppe Σ und $o \in M$. Dann ist die Standgruppe Σ_o im Zentralisator $C_\Sigma(s_o)$ der Spiegelung an o enthalten.

Beweis. Jedes $\alpha \in \Sigma_o$ ist Produkt von Spiegelungen, also gilt $\alpha s_o \alpha^{-1} = s_{\alpha(o)} = s_o$. □

Die Spiegelung an $o \in M$ induziert mittels Konjugation eine Involution γ auf der Bewegungsgruppe Σ. Zusammen mit dem letzten Satz erhalten wir $\Sigma_o \leq C_\Sigma(s_o) = \operatorname{Fix} \gamma$. Für jedes $\tau \in \operatorname{Fix} \gamma$ ist $\tau(o)$ ein Fixpunkt von s_o. Da o ein isolierter Fixpunkt von s_o ist, können wir folgern, dass die Zusammenhangskomponente der Identität in Σ_o enthalten ist, also $(\operatorname{Fix} \gamma)^1 \leq \Sigma_o$.

Zu einem gegebenen symmetrischen Raum können wir also eine Gruppe Σ, eine Untergruppe Σ_o und eine Involution γ mit $(\operatorname{Fix} \gamma)^1 \leq \Sigma_o \leq \operatorname{Fix} \gamma$ angeben. Umgekehrt können wir in einer solchen Situation einen Nebenklassenraum von Σ mit einer symmetrischen Struktur versehen:

2.10 Satz
Es sei G eine Lie-Gruppe, $\gamma \in \operatorname{Aut}(G)$ eine Involution und $\Delta \leq G$ eine Untergruppe mit $(\operatorname{Fix} \gamma)^1 \leq \Delta \leq \operatorname{Fix} \gamma$. Dann ist Δ abgeschlossen und G/Δ ein symmetrischer Raum.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [20, Theorem 1.3.a) auf Seite 73]. Dort finden wir auch die Multiplikation des symmetrischen Raumes:

$$g\Delta \cdot h\Delta = g\gamma(g^{-1}h)\Delta.$$

□

Die Theorie über zusammenhängende symmetrische Räume ist einfacher als die allgemeine Theorie. Aus diesem Grunde beschränken wir uns zunächst auf diesen einfacheren Fall. Wenn wir diese genügend gut verstanden haben, übertragen wir die Resultate auf die unzusammenhängenden Räume.

2.11 Satz
Die Bewegungsgruppe eines zusammenhängenden symmetrischen Raumes wirkt transitiv auf dem symmetrischen Raum.

Beweis. Wir verweisen auf [20, 3.1.a) auf Seite 91]. □

Aus der Transitivität der Bewegungsgruppe folgt, dass für zusammenhängende symmetrische Räume M die symmetrischen Räume mit Basispunkt (M, o_1) und (M, o_2) isomorph sind, das also ein Isomorphismus existiert, der o_1 auf o_2 abbildet. In Satz 2.10 haben wir auf einer Menge von Nebenklassen in einer Gruppe eine symmetrische Struktur definiert. Wir haben dafür eine Untergruppe Δ mit $(\Sigma_o)^1 \leq \Delta \leq \Sigma_o$ benötigt. Bei einem zusammenhängenden symmetrischen Raum wird diese Voraussetzung einfacher.

2.12 Satz
Es sei M ein zusammenhängender symmetrischer Raum. Dann ist M isomorph zu Σ/Σ_o, wobei Σ die Bewegungsgruppe und Σ_o der Stabilisator von $o \in M$ ist.

Beweis. Wir verweisen auf [20, 3.1.b) auf Seite 91]. □

Dank dieses Satzes können wir uns einen zusammenhängenden symmetrischen Raum also immer als Faktorraum vorstellen. Wir erkennen auch, dass wir mit der Konstruktion aus Satz 2.10 keine neuen symmetrischen Räume erhalten.

Wie bereits bei den stabilen Räumen wollen wir uns kurz den Unterräumen zuwenden. Dazu definieren wir zunächst diesen Begriff.

2.13 Definition
Es sei M ein symmetrischer Raum und $N \subseteq M$ eine immersiv eingebettete Untermannigfaltigkeit. Ist N mit den induzierten Strukturen ein symmetrischer Raum, so heißt N ***symmetrischer Unterraum*** von M.

Beispiele für symmetrische Unterräume gibt uns der nächste Satz. Offensichtlich dürfen wir durch Anwenden der Symmetrien den Raum nicht verlassen.

2.14 Satz
Es sei N eine abgeschlossene Teilmenge eines symmetrischen Raumes M derart, dass $N \cdot N \subseteq N$ gilt. Dann ist N ein symmetrischer Unterraum von M.

Beweis. Wir verweisen auf [20, Theorem 1.7 auf Seite 125]. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes betrachten wir das Zentrum eines symmetrischen Raumes.

2.15 Definition
Es sei M ein symmetrischer Raum mit Bewegungsgruppe Σ. Bei Wahl eines Punktes $o \in M$ ist das ***Zentrum*** des symmetrischen Raumes

$$Z(M, o) = \{x \in M \; : \; s_x s_o \in Z(\Sigma)\}.$$

Das Zentrum ist nach dieser Definition noch abhängig von der Wahl des Basispunktes. In zusammenhängenden Räumen ist dies (fast) nicht der Fall.

2.16 Satz
Es sei M ein zusammenhängender symmetrischer Raum. Der Isomorphietyp des Zentrums $Z(M, o)$ ist unabhängig von der Wahl des Punktes $o \in M$.

Beweis. Zu zwei Punkten existiert wegen der Transitivität (vgl. Satz 2.11) ein Element der Bewegungsgruppe, das einen der beiden Punkte auf den anderen abbildet. Diese Abbildung induziert einen Isomorphismus zwischen den Zentren. □

Wegen des letzten Satzes werden wir auch einfach nur vom Zentrum eines symmetrischen stabilen Raumes sprechen und den Basispunkt nur erwähnen, wenn es notwendig ist.

Zum Abschluss dieses Abschnittes zitieren wir noch ein Resultat, welches das Zentrum der Bewegungsgruppe und das Zentrum eines symmetrischen Raumes noch enger miteinander verbindet.

2.17 Satz
Ist die Bewegungsgruppe eines symmetrischen Raumes M zentrumsfrei, so ist M zentrumsfrei, das heißt $Z(M, o) = \{o\}$ für alle $o \in M$.

Beweis. Wir verweisen auf [20, Proposition 2.3.a) auf Seite 134]. □

2.18 Definition
Ein symmetrischer Raum M heißt ***riemannsch***, wenn es eine unter allen Spiegelungen $s_x, x \in M$ invariante Riemannsche Metrik auf dem Raum gibt.

2.3 Symmetrische stabile Räume

Wir kombinieren die Begriffe der stabilen Räume und der symmetrischen Räume zu symmetrischen stabilen Räumen. Die im Abschnitt über symmetrische Räume vorbereiteten Resultate werden wir größtenteils auf symmetrische stabile Räume übertragen. Wir geben Beispiele für symmetrische stabile Räume und nennen die bereits bekannten Klassifikationssätze.

Für die folgende Definition ist es notwendig, dass wir eine Wirkung der Spiegelungen eines symmetrischen Raumes auf einem stabilen Raum mit identischer Punktmenge definieren. Dazu seien $(M, \{s_x : x \in M\})$ ein symmetrischer Raum und $(\mathcal{M}, \leq)$ ein stabiler Raum mit $M = \mathcal{M}_0$. Für $x \in M$ und $0 \neq U \in \mathcal{M}$ definieren wir $s_x(U) := \{s_x(u) : 0 \prec u \leq U\}$.

2.19 Definition
Es sei $(M, \{s_x : x \in M\})$ ein symmetrischer Raum. Ist $(\mathcal{M}, \leq)$ ein reichhaltiger stabiler Raum vom Rang $n \geq 2$ mit Punktmenge $M = \mathcal{M}_0$ und ist $s_x(\mathcal{M}_k) \subseteq \mathcal{M}_k$ für alle k, so heißt M ***symmetrischer stabiler Raum***.

In den meisten Fällen wird uns nur ein einzelner symmetrischer stabiler Raum vorliegen. Aus diesem Grunde verzichten wir oft auf eine genaue Angabe der Strukturen des symmetrischen bzw. stabilen Raumes, wenn es dadurch nicht zu Unklarheiten kommen kann.

2.20 Definition
Es sei M ein symmetrischer stabiler Raum. Den Rang des stabilen Raumes M bezeichnen wir als ***Rang*** oder ***geometrische Dimension*** des symmetrischen stabilen Raumes. Die topologische Dimension einer Geraden bezeichnen wir als ***Geradendimension*** des symmetrischen stabilen Raumes.

Unser Ziel ist die Klassifikation der symmetrischen stabilen Räume. Symmetrische Ebenen, also symmetrische stabile Räume, deren Rang 2 hat, sind bereits klassifiziert. Wegen Satz 2.4 können wir uns stabile Räume ab Rang 3 als offene Teilgeometrien projektiver Räume über $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ vorstellen. Da dies eine wesentliche Vereinfachung darstellt, konzentrieren wir uns primär auf die etwas „größeren“ Räume.

Ist der Rang mindestens 3, so können wir den symmetrischen stabilen Raum als offene Teilgeometrie eines projektiven Raumes betrachten. Dies ermöglicht uns wegen [10, 2.21], wo nach einigen Vorarbeiten auf [19] verwiesen wird, die Symmetrien (eindeutig) zu Automorphismen des projektiven Raumes fortzusetzen. Wegen des isolierten Fixpunktes handelt es sich hierbei um zentrale Involutionen.

Da die Räume vom Rang 2 bereits hinreichend studiert sind, werden wir auf diese Resultate zurückgreifen. Wie der nächste Satz zeigt, dürfen wir das.

2.21 Satz

Es sei M ein symmetrischer stabiler Raum und $N \leq M$ eine Untergeometrie (des stabilen Raumes) vom Rang mindestens 2. Dann ist auch N ein symmetrischer stabiler Raum.

Beweis. Wir verweisen auf [10, 4.5]. ☐

Bereits bei den symmetrischen Räumen haben wir Standgruppen betrachtet. Wir konnten zeigen, dass es sich um Untergruppen des Zentralisators der Spiegelung an dem entsprechenden Punkt handelt. Die zusätzlichen Eigenschaften durch den stabilen Raum geben uns eine noch nützlichere Aussage.

2.22 Satz
Es sei M ein symmetrischer stabiler Raum mit Bewegungsgruppe Σ und $o \in M$. Dann stimmt der Stabilisator Σ_o mit dem Zentralisator $C_\Sigma(s_o)$ der Spiegelung an o überein.

Beweis. Eine Inklusion finden wir in Satz 2.9. Für den ebenen Fall ist der Satz in [18, Proposition 1.6] bewiesen. Der Beweis für Räume höheren Ranges steht in [10, 4.4]. ☐

Wir arbeiten wie bei den symmetrischen Räumen weiter: Symmetrische stabile Räume lassen sich — erwartungsgemäß — aus Gruppen konstruieren. Die Stabilität erhalten wir auf diese Weise jedoch nicht. Aus diesem Grunde setzen wir sie voraus.

2.23 Satz
Es sei M ein zusammenhängender stabiler Raum und $G \leq \mathrm{Aut}(M)$ abgeschlossen und transitiv. Es existiere ein $o \in M$ derart, dass das Zentrum der Standgruppe G_o eine Spiegelung enthält. Dann ist M ein symmetrischer stabiler Raum. Die Bewegungsgruppe ist ein Normalteiler von G.

Beweis. Für den ebenen Fall verweisen wir auf [18, 2.1 Theorem A] und rechnen die Normalteilereigenschaft nach. Der räumliche Fall ist in [10, 4.13] bewiesen.

In beiden Beweisen wird die Menge der Nebenklassen G/G_o wie in Satz 2.10 mit einer symmetrischen Struktur versehen. Wegen der Transitivität kann diese Struktur auf M übertragen werden. ☐

In beiden eben zitierten Beweisen wird zunächst gezeigt, dass die in den Voraussetzungen genannte Spiegelung die einzige dieser Art ist und dass die Symmetrien des symmetrischen Raumes hierzu konjugiert sind.

Wir nutzen den letzten Satz um eine erste Klasse von Beispielen anzugeben.

2.24 Satz
Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, $V = \mathbb{K}^{n+1}$ mit $n \geq 2$ und f eine (schief)-hermitesche oder symmetrische Sesquilinearform auf V derart, dass die im nächsten Absatz definierte Menge M_f nicht leer ist.

Wir definieren eine Teilmenge des n-dimensionalen projektiven Raumes

$$M_f = \begin{cases} \{x\mathbb{K} \leq V \,:\, f(x,x) > 0\} & \text{falls } f \text{ hermitesch,} \\ \{x\mathbb{K} \leq V \,:\, f(x,x) \neq 0\} & \text{falls } f \text{ } \mathbb{C}\text{-symmetrisch,} \\ \{x\mathbb{K} \leq V \,:\, f(x,x) \neq 0\} & \text{falls } f \text{ } \mathbb{H}\text{-schief-hermitesch.} \end{cases}$$

Wir betrachten M_f als Punktmenge und definieren die orthogonale Spiegelung an $x\mathbb{K}$

$$(x\mathbb{K}) \cdot (y\mathbb{K}) = \big(y - 2x\,(f(x,x))^{-1}\, f(x,y)\big)\,\mathbb{K} \in M_f.$$

Dann ist M_f mit der angegebenen Multiplikation ein symmetrischer stabiler Raum vom Rang n mit Geradendimension $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. Die Bewegungsgruppe des Raumes ist ein Normalteiler von $\mathrm{PU}^*(f)$.

Beweis. Nach Satz 1.2 wirkt die Gruppe $\mathrm{PU}^*(f)$ transitiv auf M_f. Wir wählen ein $x\mathbb{K} \in M_f$ mit $f(x,x) \neq 0$. Mit $s_{x\mathbb{K}}$ bezeichnen wir die Abbildung $y\mathbb{K} \mapsto (x\mathbb{K}) \cdot (y\mathbb{K})$. Ohne Probleme sieht man $s_{x\mathbb{K}} \in \mathrm{PU}^*(f)$ ein. Die Abbildung $s_{x\mathbb{K}}$ ist eine Involution. Eine relativ einfache Rechnung ergibt, dass $y\mathbb{K}$ genau dann Fixpunkt von $s_{x\mathbb{K}}$ ist, wenn $x\mathbb{K} = y\mathbb{K}$ oder $f(x,y) = 0$ gilt. Wegen der Wahl von $x\mathbb{K}$ ist $x\mathbb{K}$ somit ein isolierter Fixpunkt. Demnach ist $s_{x\mathbb{K}}$ eine Spiegelung. Eine direkte Rechnung zeigt, dass $s_{x\mathbb{K}}$ und $s_{y\mathbb{K}}$ genau dann kommutieren, wenn $x\mathbb{K} = y\mathbb{K}$ oder $f(x,y) = 0$ gilt. Gilt $s_{y\mathbb{K}} \in \mathrm{PU}^*(f)_{x\mathbb{K}}$, so haben wir oben bereits eingesehen, dass die eben genannte Bedingung erfüllt ist. Somit gilt $s_{x\mathbb{K}} \circ s_{y\mathbb{K}} = s_{y\mathbb{K}} \circ s_{x\mathbb{K}}$ für alle $s_{y\mathbb{K}} \in \mathrm{PU}^*(f)_{x\mathbb{K}}$. Demnach ist $s_{x\mathbb{K}}$ ein Element des Zentrums der Standgruppe $\mathrm{PU}^*(f)_{x\mathbb{K}}$. Nach Satz 2.23 ist M_f ein symmetrischer stabiler Raum und die Bewegungsgruppe ein Normalteiler von $\mathrm{PU}^*(f)$. $\square$

Wir wollen zeigen, dass viele symmetrische stabile Räume eine solche Gestalt haben. Aus diesem Grunde werden wir häufig auf diese Räume verweisen müssen.

2.25 Definition
Die im Satz 2.24 definierten symmetrischen stabilen Räume heißen ***klassische symmetrische stabile Räume***. Wir bezeichnen diese Räume auch mit $M(f)$.

Kann die Sesquilinearform f durch eine Matrix in Normalform mit den Diagonaleinträgen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ dargestellt werden, so schreiben wir auch

- $M(\mathbb{K}, \kappa_{\mathbb{K}}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_k \in \{1, 0, -1\}$, falls f hermitesch ist,
- $M(\mathbb{C}, \mathrm{id}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_k \in \{1, 0\}$, falls f $\mathbb{C}$-symmetrisch ist und
- $M(\mathbb{H}, \kappa_i, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_k \in \{1, 0\}$, falls f $\mathbb{H}$-schief-hermitesch ist.

Wir können jeden klassischen symmetrischen stabilen Raum in dieser Form angeben.

2.26 Satz
Jedes $M(f)$ ist zu einem $M(\mathbb{K}, \kappa, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ isomorph — und umgekehrt.

Beweis. Sei n der Rang von $M(f)$. Nach Satz 1.1 können wir eine Basis von $\mathbb{K}^{n+1}$ derart wählen, dass die Matrix der Sesquilinearform Diagonalgestalt hat. Der Basiswechsel ist der gesuchte Isomorphismus. $\square$

Nach der Angabe von einer so großen Klasse von symmetrischen stabilen Räumen ist eine naheliegende Frage, welche davon zueinander isomorph sind. Die Antwort geben wir in Satz 3.62. Hilfreich für diesen Satz wird die Kenntnis der Bewegungsgruppe sein. Diese werden wir in Satz 2.34 nach der Angabe der bereits bekannten Klassifikationssätze untersuchen.

Nun wollen wir weitere symmetrische stabile Räume angeben. Wie wir aus Satz 2.21 wissen, sind die Unterräume vom Rang 2 symmetrische Ebenen, also bereits bekannt. Die von uns untersuchten symmetrischen stabilen Räume müssen demnach die bekannten Ebenen enthalten. Das gleich angegebene Beispiel findet man im ebenen Fall auch in [17, Theorem 1.6.3] mit einer alternativen Definition. Der dortige Zugang zeigt noch mehr als die folgenden Rechnungen, dass sich die in den nächsten beiden Sätzen definierten Räume sehr ähnlich sind.

2.27 Satz
Es sei $n \geq 2$. Wir definieren

$$M_- = \left\{(1, x_1, \ldots, x_n)^{tr}\mathbb{H} \,:\, x_1 \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{C}, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{H}\right\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{H}).$$

Für $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc = 1, ||e|| = 1$ und $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{H}$ wirken die durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & d & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & & & & \\ & e & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

gegebenen Abbildungen auf M_-. Die durch die Matrix

$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & j & & & \\ -j & 0 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene Abbildung ist eine Spiegelung an $o := (1, -j, 0, \ldots, 0)^{tr}\mathbb{H}$. Die Punktmenge M_- ist zusammen mit den zugehörigen höherdimensionalen Objekten ein symmetrischer stabiler Raum. Die von den angegebenen Abbildungen erzeugte Gruppe ist die Bewegungsgruppe. Diese ist zentrumsfrei.

Beweis. Die Menge M_- ist offen im projektiven Raum, also ein stabiler Raum. Die von den angegebenen Matrizen erzeugte Gruppe Σ wirkt transitiv auf M_- (man betrachte zunächst die Punkte der Form $(1, x_1, 0, \ldots, 0)^{tr}\mathbb{H}$). Die Standgruppe des Punktes o ist isomorph zu $(\mathrm{SU}_2\mathbb{C} \ltimes \mathbb{H}) \times \langle\sigma\rangle$. Die Spiegelung liegt in $Z(\Sigma_o)$. Den Rest bis auf das Zentrum entnehmen wir Satz 2.23. Wir rechnen nach, dass das Zentrum trivial ist. $\square$

2.28 Definition
Den in Satz 2.27 definierten Raum bezeichnen wir als ***symmetrischen Raum vom Typ*** $(R-)$.

Wir kommen direkt zur nächsten Klasse von symmetrischen stabilen Räumen. Die wiederum vorgenommene projektive Einbettung der Punktmenge ist nicht nötig. Allerdings vereinfacht sie auch hier die Rechnungen etwas.

2.29 Satz
Es sei $n \geq 2$. Wir definieren

$$M_+ = \left\{(1, x_1, \ldots, x_n)^{tr}\mathbb{H} \,:\, x_1 \neq 0, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{H}\right\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{H}).$$

Für $a, b \in \mathbb{H}$ mit $||a|| = ||b|| = 1$, $r > 0$ und $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{H}$ wirken die durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} b &&&& \\ & a &&& \\ && 1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r^{-1} &&&& \\ & r &&& \\ && 1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & 1 &&& \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 && \\ \vdots & \vdots && \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} &&& 1 \end{pmatrix}$$

gegebenen Abbildungen auf M_+. Die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 &&& \\ -1 & 0 &&& \\ && -1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& -1 \end{pmatrix}$$

gegebene Abbildung ist eine Spiegelung an $o := (1, -1, 0, \ldots, 0)^{tr}\mathbb{H}$. Die Punktmenge M_+ ist zusammen mit den zugehörigen höherdimensionalen Objekten ein symmetrischer stabiler Raum. Der Raum M_+ ist einfach zusammenhängend.

Beweis. Die Menge M_+ ist eine Teilmenge des affinen Raumes und offenbar einfach zusammenhängend. Die Menge M_+ ist offen im projektiven Raum, also ein stabiler Raum. Die von den angegebenen Matrizen erzeugte Gruppe Σ wirkt transitiv auf M_+ (man betrachte zunächst die Punkte der Form $(1, x_1, 0, \dots, 0)^{tr}\mathbb{H}$). Die Standgruppe des Punktes o ist isomorph zu $(\mathrm{Spin}_3\mathbb{R} \ltimes \mathbb{H}) \times \langle\sigma\rangle$. Die Spiegelung liegt in $Z(\Sigma_o)$. Den Rest entnehmen wir Satz 2.23. $\square$

2.30 Definition
Den in Satz 2.29 definierten Raum bezeichnen wir als ***symmetrischen Raum vom Typ*** $(R+)$.

Nachdem wir nun einige Beispiele angegeben haben, möchten wir die bereits genannte Klassifikation der „kleineren“ symmetrischen stabilen Räume zitieren. Wir beginnen mit symmetrischen stabilen Räumen kleinen Ranges.

Zusätzlich zu den hier vorgestellten symmetrischen Ebenen, gibt es solche über Kalscheuer-Fastkörpern bzw. über den Oktaven. Für die Kalscheuer-Fastkörper-Ebenen verweisen wir auf [15]. Auf den ersten Seiten von [17] findet man die Oktaven-Ebenen.

2.31 Satz
Es sei M eine zusammenhängende symmetrische Ebene. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

- M ist klassisch über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.
- M ist vom Typ $(R+)$.
- M ist vom Typ $(R-)$.
- M ist eine Ebene über einem echten Kalscheuer-Fastkörper.
- M ist eine Ebene über den Oktaven.

Beweis. Wir verweisen auf [17, 4.1.1]. $\square$

Wegen Satz 2.4 sind die Ebenen über Kalscheuer-Fastkörpern bzw. über den Oktaven für uns weniger relevant.

Für die auch bei uns vorkommenden Ebenen, also die klassischen und diejenigen vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$, geben wir eine vollständige Liste in einer Tabelle auf Seite 23 an. Dort bezeichnet κ_i den Antiautomorphismus $\kappa_i(x) = i^{-1}\overline{x}i$. Die in der Tabelle genannten Bewegungsgruppen entnehmen wir den Seiten 13, 54, 56 und 57 von [17]. Ebenfalls angegeben sind die Bezeichnungen aus [17].

Ebene	Bez. in [17]	Bewegungsgruppe Σ	$\dim\Sigma$
$M(\mathbb{R},\kappa,1,0,0)$	$\mathrm{A}_2\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^2$	2
$M(\mathbb{R},\kappa,1,1,1)$	$\mathrm{Ell}_2\mathbb{R}$	$\mathrm{PSO}_3\mathbb{R}$	3
$M(\mathbb{R},\kappa,1,1,-1)$	$\mathrm{EH}_2\mathbb{R}$	$\mathrm{PSO}_3^+(\mathbb{R},1)$	3
$M(\mathbb{R},\kappa,1,-1,-1)$	$\mathrm{IH}_2\mathbb{R}$	$\mathrm{PSO}_3^+(\mathbb{R},1)$	3
$M(\mathbb{R},\kappa,1,1,0)$	$\mathrm{S}_2(\mathbb{R},0)$	$\mathrm{SO}_2\mathbb{R}\ltimes\mathbb{R}^2$	3
$M(\mathbb{R},\kappa,1,-1,0)$	$\mathrm{S}_2(\mathbb{R},1)$	$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R},1)\ltimes\mathbb{R}^2$	3
$M(\mathbb{C},\kappa,1,0,0)$	$\mathrm{A}_2\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^2$	4
$M(\mathbb{C},\kappa,1,1,1)$	$\mathrm{Ell}_2\mathbb{C}$	$\mathrm{PSU}_3\mathbb{C}$	8
$M(\mathbb{C},\kappa,1,1,-1)$	$\mathrm{EH}_2\mathbb{C}$	$\mathrm{PSU}_3(\mathbb{C},1)$	8
$M(\mathbb{C},\kappa,1,-1,-1)$	$\mathrm{IH}_2\mathbb{C}$	$\mathrm{PSU}_3(\mathbb{C},1)$	8
$M(\mathbb{C},\mathrm{id},1,1,1)$	$\mathrm{AU}_2\mathbb{C}$	$\mathrm{PSO}_4^+(\mathbb{R},1)$	6
$M(\mathbb{C},\kappa,1,1,0)$	$\mathrm{S}_2(\mathbb{C},0)$	$\mathrm{SU}_2\mathbb{C}\ltimes\mathbb{C}^2$	7
$M(\mathbb{C},\mathrm{id},1,1,0)$	$\mathrm{S}_2(\mathbb{C},1)$	$\mathrm{SO}_2\mathbb{C}\ltimes\mathbb{C}^2$	6
$M(\mathbb{C},\kappa,1,-1,0)$	$\mathrm{S}_2(\mathbb{C},2)$	$\mathrm{SU}_2(\mathbb{C},1)\ltimes\mathbb{C}^2$	7
$M(\mathbb{H},\kappa,1,0,0)$	$\mathrm{A}_2\mathbb{H}$	$\mathbb{H}^2$	8
$M(\mathbb{H},\kappa,1,1,1)$	$\mathrm{Ell}_2\mathbb{H}$	$\mathrm{PU}_3\mathbb{H}$	21
$M(\mathbb{H},\kappa,1,1,-1)$	$\mathrm{EH}_2\mathbb{H}$	$\mathrm{PU}_3(\mathbb{H},1)$	21
$M(\mathbb{H},\kappa,1,-1,-1)$	$\mathrm{IH}_2\mathbb{H}$	$\mathrm{PU}_3(\mathbb{H},1)$	21
$M(\mathbb{H},\kappa_i,1,1,1)$	$\mathrm{AU}_2\mathbb{H}$	$\mathrm{PSU}_4(\mathbb{C},1)$	15
$M(\mathbb{H},\kappa,1,1,0)$	$\mathrm{S}_2(\mathbb{H},0)$	$\mathrm{U}_2\mathbb{H}\ltimes\mathbb{H}^2$	18
Typ $(R+)$	$\mathrm{S}_2(\mathbb{H},1)$	$(\mathrm{Spin}_4\mathbb{R}\cdot\mathbb{R})\ltimes\mathbb{H}^2$	15
$M(\mathbb{H},\kappa_i,1,1,0)$	$\mathrm{S}_2(\mathbb{H},2)$	$\mathrm{U}_2^\alpha\mathbb{H}\ltimes\mathbb{H}^2$	14
Typ $(R-)$	$\mathrm{S}_2(\mathbb{H},3)$	$(\mathrm{SL}_2\mathbb{C}\cdot\mathrm{SO}_2\mathbb{R})\ltimes\mathbb{H}^2$	15
$M(\mathbb{H},\kappa,1,-1,0)$	$\mathrm{S}_2(\mathbb{H},4)$	$\mathrm{U}_2(\mathbb{H},1)\ltimes\mathbb{H}^2$	18

Da die meisten der in der Tabelle aufgefügten Ebenen bereits dicht in (geeigneten) projektiven Ebenen liegen, erhalten wir kaum unzusammenhängende Ebenen.

2.32 Satz
Es sei M eine symmetrische Ebene. Dann ist M zusammenhängend und isomorph zu einem der Räume aus Satz 2.31 oder M ist unzusammenhängend und isomorph zu einer Vereinigung von $\mathrm{EH}_2\mathbb{K}$ und $\mathrm{IH}_2\mathbb{K}$ oder M ist unzusammenhängend und isomorph zu einer Vereinigung von zwei Kopien von $M(\mathbb{K}, \kappa, 1, -1, 0)$ — jeweils mit passendem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

Beweis. Wir verweisen auf [12]. $\square$

Damit ist die Klassifikation der symmetrischen Ebenen komplett. Auch in den höheren Rängen liegen bereits Klassifikationsresultate vor. Hier müssen wir allerdings voraussetzen, dass die Geradendimension maximal 2 ist.

2.33 Satz
Es sei M ein symmetrischer stabiler Raum vom Rang mindestens 3 und mit Geradendimension maximal 2. Dann ist M klassisch.

Beweis. Wir verweisen auf [10, 6.8] und [10, 7.9]. $\square$

Wir kommen nun zu der bereits angekündigten Untersuchung der Bewegungsgruppen klassischer Räume.

Wegen Satz 2.23 interessieren wir uns für Normalteiler von $\mathrm{PU}^*(f)$. Diese können wir recht einfach berechnen. Es gilt $\mathrm{PU}^*(f) = \mathrm{PU}^*(f') \ltimes \mathbb{K}^k$, wobei f' der nichtentartete Anteil der Sesquilinearform f und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ passend gewählt ist. Betrachten wir einen Normalteiler N mit $N \not\leq \mathbb{K}^k$ und ein $(x, y) \in N \cap \mathrm{PU}^*(f') \ltimes \mathbb{K}^k$, so sehen wir zunächst $(x, 0) \in N$ und dann $\mathrm{PU}^*(f') \leq N$ ein. Ist $\mathrm{PU}^*(f')$ einfach, so gilt demnach für jeden Normalteiler $N \trianglelefteq \mathrm{PU}^*(f)$ die Beziehung $N \leq \mathbb{K}^k$ oder $N = \mathrm{PU}^*(f') \ltimes N'$ mit $N' \leq \mathbb{K}^k$. Daraus erhalten wir

2.34 Satz
Es sei M_f ein klassischer symmetrischer stabiler Raum mit $n \geq 2$ und mit einer Sesquilinearform f auf $\mathbb{K}^{n+1}$. Hat das Radikal von f Dimension n, so ist die Bewegungsgruppe von M_f abelsch. In allen anderen Fällen ist die Bewegungsgruppe $\mathrm{PU}^*(f') \ltimes \mathbb{K}^{d(n+1-d)}$, wobei $d = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{rad}\,(f)$ gilt. Insbesondere ist die Bewegungsgruppe abelsch oder hat triviales Zentrum.

Beweis. Die Bewegungsgruppe ist genau dann abelsch, wenn die Kodimension des Radikals der Sesquilinearform 1 ist. Ist $\mathrm{PU}^*(f')$ einfach, so folgt der Rest mit unseren Vorüberlegungen.

Zu untersuchen bleiben demnach noch die nicht-einfachen $\mathrm{PU}^*(f')$. Nach [25] müssen wir drei Fälle untersuchen: $\mathrm{PU}_2^\alpha\mathbb{H}$, $\mathrm{PSO}_4\mathbb{R}$ und $\mathrm{PSO}_4(\mathbb{R}, 2)$.

- Gilt $\mathrm{PU}^*(f') = \mathrm{PU}_2^\alpha\mathbb{H}$, so handelt es sich bei f' um eine schiefhermitesche Sesquilinearform auf $\mathbb{H}^2$. Der zugehörige klassische Raum ist demnach 4-dimensional. Die nicht-trivialen Normalteiler sind nach [23, Seite 136] 3-dimensional. Wäre die Bewegungsgruppe ein nicht-trivialer Normalteiler, so könnte sie nicht mehr transitiv auf einem 4-dimensionalen Raum wirken.

- In den anderen zwei Fällen erhalten wir, dass f' eine hermitesche Sesquilinearform auf $\mathbb{R}^4$ ist. Der klassische Raum hat folglich Rang 3. Von beiden hier untersuchten Gruppen sind die nicht-trivialen Normalteiler nach [23, Seite 136] 3-dimensional. Wir betrachten eine Unterebene. Diese ist nicht abelsch. Die Bewegungsgruppe hat somit nach Satz 2.31 Dimension 3. Folglich muss die Bewegungsgruppe des größeren Raumes mindestens 4-dimensional sein.

In allen Fällen erkennen wir also, dass die halbeinfache Gruppe $\mathrm{PU}^*(f)$ ganz in der Bewegungsgruppe enthalten ist. $\square$

3 Lie-Tripel-Geometrien

Zur weiteren Untersuchung der symmetrischen stabilen Räume betrachten wir deren Tangentialräume. Wie wir gleich zeigen werden, besitzen diese eine Struktur, die an Lie-Algebren erinnert. Wir werden einige Eigenschaften der Struktur der Tangentialräume angeben und die Tangentialräume der bereits bekannten Beispiele für symmetrische stabile Räume etwas genauer anschauen.

3.1 Allgemeines

Es sei M ein zusammenhängender symmetrischer stabiler Raum mit Bewegungsgruppe Σ. Wir wählen einen Punkt $o \in M$ und bezeichnen die Standgruppe von o mit Σ_o. Nach Satz 2.12 gilt $M = \Sigma/\Sigma_o$. Die Spiegelung s_o induziert auf dem Tangentialraum eine Involution σ. Die Lie-Algebra $S = \mathfrak{L}\Sigma$ lässt sich als Summe der Eigenräume der Involution σ schreiben: $S = S_1 \oplus S_{-1}$. Nach Satz 2.22 stimmt die Standgruppe Σ_o mit dem Zentralisator $C_\Sigma(s_o)$ überein. Demnach sind die Lie-Algebren dieser Gruppen identisch. Wir erhalten $S_1 = \mathfrak{L}\Sigma_o$. Folglich gilt wegen Satz 2.11 $\dim S_{-1} = \dim S/S_1 = \dim \Sigma/\Sigma_o = \dim M$.

Man berechnet $[S_1, S_1] \subseteq S_1$, $[S_{-1}, S_{-1}] \subseteq S_1$, $[S_1, S_{-1}] \subseteq S_{-1}$ und erkennt

$$[x, y, z] := [[x, y], z] \in S_{-1} \quad \text{für alle } x, y, z \in S_{-1}.$$

Diese Überlegungen und weitere aus der Definition von Lie-Algebren übernommene Eigenschaften ergeben die Definition von Lie-Tripel-Systemen:

3.1 Definition
Es seien V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $[\cdot,\cdot,\cdot] : V \times V \times V \to V$ eine trilineare Abbildung, die für alle $a, b, x, y, z \in V$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&[x, y, z] = -[y, x, z]\\
&[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0\\
&[a, b, [x, y, z]] = [[a, b, x], y, z] + [x, [a, b, y], z] + [x, y, [a, b, z]]
\end{aligned}$$

erfüllt. Dann heißt $(V, [\cdot,\cdot,\cdot])$ ***Lie-Tripel-System***.

Die trilineare Abbildung bezeichnen wir als Lie-Tripel-Produkt oder Lie-Tripel-Multiplikation und lassen sie in unseren Formulierungen einfach weg, wenn dadurch keine Unklarheiten entstehen.

Oben haben wir ein Lie-Tripel-System aus einer Lie-Algebra erhalten. Wie das nächste Beispiel zeigt, ist dies immer möglich.

3.2 Beispiel
Es sei T eine Lie-Algebra. Wir definieren $[x, y, z] := [[x, y], z]$. Aus den Eigenschaften einer Lie-Algebra lässt sich einfach nachrechnen, dass T ein Lie-Tripel-System ist. Wir bezeichnen solche Lie-Tripel-Systeme als ***als Lie-Tripel-System aufgefasste Lie-Algebren***.

Unser Hauptinteresse an Lie-Tripel-Systemen kommt von den Überlegungen zu Beginn dieses Abschnittes. Wir halten deshalb fest:

3.3 Satz
Der Tangentialraum eines symmetrischen Raumes ist ein Lie-Tripel-System, wenn man $S_{-1} \cong S/S_1$ und T_oM mittels der Ableitung von $\Sigma/\Sigma_o \to M$ identifiziert.

Eine zentrale Rolle bei der Untersuchung von Lie-Tripel-Systemen spielen die Abbildungen $z \mapsto [x, y, z]$. Die dritte Gleichung in der Definition von Lie-Tripel-Systemen besagt, dass diese Abbildungen eine besondere Eigenschaft erfüllen.

3.4 Definition
Es sei T ein Lie-Tripel-System. Eine lineare Abbildung $\varphi : T \to T$ mit

$$\varphi([x, y, z]) = [\varphi(x), y, z] + [x, \varphi(y), z] + [x, y, \varphi(z)]$$

heißt ***Derivation*** von T. Die Menge der Derivationen ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, den wir mit $\mathrm{Der}(T)$ bezeichnen.

Die bereits in der Definition von $\mathrm{Der}(T)$ genannte Vektorraumeigenschaft ist klar. Die Abbildungen $\mathrm{ad}[x, y] : z \mapsto [x, y, z]$ sind direkt nach Definition eines Lie-Tripel-Systems Derivationen.

3.5 Definition
Derivationen der Form $\mathrm{ad}[x, y]$ bezeichnen wir als ***innere Derivationen***. Für den von den inneren Derivationen aufgespannten Unterraum von $\mathrm{Der}(T)$ schreiben wir $\mathrm{ad}[T, T]$.

Auch bei der Theorie der Lie-Algebren begegnen uns Derivationen. Wir werden in diesem Abschnitt oft Definitionen und Sätze angeben, die uns an Lie-Algebren erinnern.

3.6 Satz
Es sei T ein Lie-Tripel-System. Die Menge $\mathrm{Der}(T)$ aller Derivationen von T ist eine Lie-Algebra. Die Menge $\mathrm{ad}[T, T]$ ist ein Ideal.

Beweis. Wir verweisen auf [16, 2.2.5]. □

Bei der Unteruchung der Lie-Tripel-Systeme interessieren wir uns natürlich nur für Isomorphieklassen. Dazu benötigen wir den Begriff des Homomorphismus.

3.7 Definition
Ein Homomorphismus von Lie-Tripel-Systemen T_1 und T_2 ist eine lineare Abbildung $\varphi : T_1 \to T_2$ mit $\varphi([x, y, z]) = [\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)]$.

Die Begriffe Isomorphismus und Automorphismus werden wie üblich definiert.

Oben haben wir bereits eingesehen, dass der Tangentialraum eines symmetrischen Raumes ein Lie-Tripel-System ist. Unser Isomorphiebegriff verträgt sich mit dieser Eigenschaft.

3.8 Satz
Tangentialräume isomorpher symmetrischer Räume sind isomorphe Lie-Tripel-Systeme.

Beweis. Wir verweisen auf das Korollar zu Lemma 2.4 in [20, Seite 80], in dem bewiesen wird, dass die Tangentialabbildung eines Isomorphismus symmetrischer stabiler Räume ein Isomorphismus von Lie-Tripel-Systemen ist. □

Mit dem Homomorphiebegriff können wir nun einen Satz formulieren, der besagt, dass alle Lie-Tripel-Systeme von symmetrischen Räumen stammen.

3.9 Satz
Zu jedem Lie-Tripel-System existiert ein symmetrischer Raum, dessen Tangentialsystem isomorph zum vorgegebenen Lie-Tripel-System ist.

Beweis. Wir verweisen auf [20, Theorem 4.12 auf Seite 116]. □

Durch den folgenden Zusammenhang zwischen Automorphismen und Derivationen ist einerseits das Studium der Automorphismen leichter, andererseits kann man unter gewissen Voraussetzungen die adjungierte Darstellung besser aufschreiben:

3.10 Satz
Es sei T ein Lie-Tripel-System. Die Lie-Algebra von $\mathrm{Aut}(T)$ ist $\mathrm{Der}(T)$.

Beweis. Den Beweis finden wir in [16, 2.2.16]. □

Aus Satz 3.6 kennen wir mit $\operatorname{ad}[T,T]$ bereits ein Ideal der Lie-Algebra $\operatorname{Der}(T)$. Den zu diesem Ideal gehörenden zusammenhängenden Normalteiler von $\operatorname{Aut}(T)$ bezeichnen wir mit $\exp \operatorname{ad}[T,T]$.

Zu einem gegebenen Lie-Tripel-System können wir auf verschiedene Weisen weitere Lie-Tripel-Systeme konstruieren. Im ersten Falle ändern wir einfach das Vorzeichen des Produktes.

3.11 Definition
Zu einem gegebenen Lie-Tripel-System $(T, [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ definieren wir eine neue Multiplikation

$$[x,y,z]^* := -[x,y,z]_T.$$

Das Lie-Tripel-System $(T, [\cdot,\cdot,\cdot]^*)$ heißt das zu $(T, [\cdot,\cdot,\cdot]_T)$ ***duale Lie-Tripel-System*** und wird mit T^* bezeichnet.

Offensichtlich gilt $T^{**} = T$.

Eine zweite Variante bei der Konstruktion neuer Lie-Tripel-Systeme ist die Betrachtung gewisser Teilmengen eines bereits bekannten Lie-Tripel-Systems.

3.12 Definition
Ein Untervektorraum $U \leq T$ eines Lie-Tripel-Systems heißt ***Untersystem***, wenn er mit der induzierten Lie-Tripel-Klammer selbst ein Lie-Tripel-System ist.

3.13 Satz
Es sei T ein Lie-Tripel-System und $\sigma \in \operatorname{Aut}(T)$. Dann ist die Fixpunktmenge $\operatorname{Fix}(\sigma)$ von σ ein Lie-Tripel-Untersystem von T. Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist ebenfalls ein Lie-Tripel-Untersystem von T.

Beweis. Sind $x, y, z \in T$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ mit $\lambda^3 = \lambda$, so gilt

$$\sigma[x,y,z] = [\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)] = [\lambda x, \lambda y, \lambda z] = \lambda^3[x,y,z] = \lambda[x,y,z].$$

□

Durch das Verfahren erhalten wir wegen der in der Regel geringeren Dimension neue Lie-Tripel-Systeme.

Die im letzten Satz genutzte Idee wenden wir auf Lie-Algebren an. Der Satz liest sich dann in folgender Form:

3.14 Satz
Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$. Dann ist die Fixpunktmenge $\operatorname{Fix}(\sigma)$

von σ ein Lie-Tripel-System. Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist ebenfalls ein Lie-Tripel-System.

Beweis. Die Lie-Algebra kann als Lie-Tripel-System aufgefasst werden. Der Lie-Algebren-Automorphismus ist dann ein Lie-Tripel-System-Automorphismus. Wir zitieren Satz 3.13. □

Hier interessieren wir uns wie zu Beginn dieses Abschnittes überwiegend für den Eigenraum zum Eigenwert -1. Aus diesem Grunde definieren wir für den Eigenraum zum Eigenwert -1 eine abkürzende Schreibweise.

3.15 Definition
Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ eine Involution. Mit $T(\mathfrak{g}, \sigma)$ bezeichnen wir den Eigenraum von σ zum Eigenwert -1, der nach Satz 3.13 ein Lie-Tripel-System ist.

Natürlich stellt sich bei dieser Definition die Frage, wann zwei Automorphismen zu isomorphen Lie-Tripel-Systemen führen. Für die Isomorphie zweier von adjungierten Darstellungen kommenden Lie-Tripel-Systeme können wir eine einfache Bedingung zeigen.

3.16 Satz
Es sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra der Lie-Gruppe G und $A, B, M \in G$ mit $A = M^{-1}BM$. Die Abbildungen $\mathrm{Ad}(A)$ und $\mathrm{Ad}(B)$ seien Involutionen. Dann sind die Lie-Tripel-Systeme $\mathfrak{g}_A := T(\mathfrak{g}, \mathrm{Ad}(A))$ und $\mathfrak{g}_B := T(\mathfrak{g}, \mathrm{Ad}(B))$ isomorph.

Beweis. Wir zeigen: Die Abbildung $\mathrm{Ad}(M) : \mathfrak{g}_B \to \mathfrak{g}_A$ ist ein Isomorphismus. Es sei $X \in \mathfrak{g}_B$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(A)\mathrm{Ad}(M)(X) &= \mathrm{Ad}(MA)(X) = \mathrm{Ad}(BM)(X) \\
&= \mathrm{Ad}(M)\mathrm{Ad}(B)(X) = \mathrm{Ad}(M)(-X) \\
&= -\mathrm{Ad}(M)(X).
\end{aligned}$$

Folglich bildet $\mathrm{Ad}(M)$ wirklich von $\mathfrak{g}_B$ nach $\mathfrak{g}_A$ ab. Für die Homomorphieeigenschaft erinnern wir daran, dass $\mathfrak{g}_A$ und $\mathfrak{g}_B$ Teilmengen einer Lie-Algebra sind und $\mathrm{Ad}(M) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ gilt. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes geben wir in Form einer Begriffsdefinition noch ein Lie-Tripel-System für einen Vektorraum beliebiger (endlicher) Dimension. Dass es sich hierbei um Lie-Tripel-Systeme handelt, ist offensichtlich.

3.17 Definition
Gilt in einem Lie-Tripel-System T für alle $x, y, z \in T$ die Gleichung $[x, y, z] = 0$,

so heißt das Lie-Tripel-System ***abelsch***.

3.2 Ideale und die Standardeinbettung

In diesem Abschnitt führen wir die Standardeinbettung eines Lie-Tripel-Systems ein. Diese Lie-Algebra ist durch das Lie-Tripel-System eindeutig bestimmt und enthält das Lie-Tripel-System als Unterraum. Wir werden einsehen, dass sich alle Lie-Tripel-Systeme als Eigenraum zum Eigenwert -1 einer geeigneten Lie-Algebren-Involution darstellen lassen.

Zunächst definieren wir die bereits genannte Standardeinbettung:

3.18 Definition
Es sei T ein Lie-Tripel-System. Wir versehen die Menge $T + \mathrm{ad}[T, T]$ mit der Struktur einer Lie-Algebra:

$$[x, y] = \begin{cases} \mathrm{ad}[x, y] & \text{falls } x, y \in T, \\ xy - yx & \text{falls } x, y \in \mathrm{ad}[T, T], \\ x(y) & \text{falls } x \in \mathrm{ad}[T, T], y \in T, \\ -y(x) & \text{falls } x \in T, y \in \mathrm{ad}[T, T]. \end{cases}$$

Man rechnet direkt nach, dass durch diese Verknüpfung eine Lie-Algebra definiert wird. Diese Lie-Algebra $T+\mathrm{ad}[T, T]$ schreiben wir kurz $T+[T, T]$ und bezeichnen wir als ***Standardeinbettung***. Die Involution auf $T + [T, T]$, $x + y \mapsto -x + y$ (mit $x \in T, y \in [T, T]$) bezeichnen wir als ***Standardinvolution***.

Wenden wir Satz 3.13 auf die Standardinvolution und die Standardeinbettung an, so erkennen wir, dass T ein Untersystem von $T+[T, T]$ ist. Bei zusammenhängenden symmetrischen Räumen finden wir die Standardeinbettung des zugehörigen Lie-Tripel-Systems an anderer Stelle wieder.

3.19 Satz
Die Lie-Algebra der Bewegungsgruppe eines zusammenhängenden symmetrischen Raumes ist isomorph zur Standardeinbettung.

Beweis. Wir verweisen auf [20, 3.1.d) auf Seite 91]. □

In der Definition der Standardeinbettung und der Standardinvolution ist die Aufgabe bereits versteckt: Um Lie-Tripel-Systeme zu finden, genügt es, wenn wir ihre Standardeinbettungen, also Lie-Algebren, suchen und unter den Involutionen der Lie-Algebra die Standardinvolution ausfindig machen.

3.20 Satz
Die Standardinvolution ist ein Lie-Algebren-Automorphismus der Standardeinbettung.

Beweis. Die Standardinvolution heiße σ, die Standardeinbettung sei $T + [T,T]$. Für die verschiedenen Möglichkeiten der Wahl von x und y gilt

$$\begin{aligned}
x, y \in T: &\quad \sigma[x,y] = [x,y] = [-x,-y] = [\sigma(x), \sigma(y)],\\
x, y \in \mathrm{ad}[T,T]: &\quad \sigma[x,y] = [x,y] = [\sigma(x), \sigma(y)],\\
x \in \mathrm{ad}[T,T], y \in T: &\quad \sigma[x,y] = -[x,y] = [x,-y] = [\sigma(x), \sigma(y)],\\
x \in T, y \in \mathrm{ad}[T,T]: &\quad \sigma[x,y] = -[x,y] = [-x,y] = [\sigma(x), \sigma(y)].
\end{aligned}$$

□

Unsere Suche nach Lie-Tripel-Systemen können wir also wie folgt zusammenfassen.

3.21 Korollar
Jedes Lie-Tripel-System ist Eigenraum zum Eigenwert -1 eines geeigneten involutorischen Automorphismus einer geeigneten Lie-Algebra.

Oben haben wir den Begriff Untersystem definiert. Wie in der Theorie der Lie-Algebren gibt es auch bei den Lie-Tripel-Systemen besondere Untersysteme.

3.22 Definition
Ein Untersystem $U \leq T$ eines Lie-Tripel-Systems heißt ***Ideal***, wenn $[U,T,T] \leq U$ gilt. Ist $U \leq T$ ein Ideal, so schreiben wir $U \trianglelefteq T$. Ein Lie-Tripel-System T heißt ***einfach***, wenn T keine nicht-trivialen Ideale enthält und $\dim(T) \geq 2$ gilt.

Ist $U \trianglelefteq T$ ein Ideal des Lie-Tripel-Systems T, so sieht man schnell ein, dass $U + [U,T]$ ein Ideal der Standardeinbettung ist. Dies bedeutet, dass das Lie-Tripel-System maximal so viele Ideale wie die Standardeinbettung hat. Für eine einfache Standardeinbettung heißt das:

3.23 Korollar
Hat ein Lie-Tripel-System eine einfache Standardeinbettung, so ist das Lie-Tripel-System einfach.

Umgekehrt können wir nicht schließen, dass ein einfaches Lie-Tripel-System eine einfache Standardeinbettung hat. Der Typ der Standardeinbettung ist dennoch nicht beliebig.

3.24 Satz
Es sei T ein einfaches Lie-Tripel-System. Dann ist die Standardeinbettung von T einfach oder T ist eine als Lie-Tripel-System aufgefasste, einfache Lie-Algebra. Im Falle, dass T eine einfache Lie-Algebra ist, ist die Standardeinbettung isomorph zu $T \oplus T$.

Beweis. Den Beweis finden wir in [13, 2.13]. $\square$

Ein konkretes Ideal betrachten wir nun genauer.

3.25 Definition
Es sei T ein Lie-Tripel-System. Die Menge

$$Z(T) := \{z \in T \ : \ \text{für alle } x, y \in T \text{ gilt } [z, x, y] = 0\}$$

bezeichnen wir als ***Zentrum*** von T. Gilt $Z(T) = 0$, so heißt T ***zentrumsfrei***.

Offensichtlich ist das Zentrum abelsch. Schwächen wir die das Zentrum definierende Eigenschaft etwas ab, so erhalten wir total abelsche Ideale.

3.26 Definition
Ein Ideal $U \trianglelefteq T$ heißt ***total abelsch***, wenn $[T, U, U] = 0$ gilt.

Natürlich ist das Zentrum eines Lie-Tripel-Systems total abelsch. Wir werden später sehen, dass in den für uns interessanten Lie-Tripel-Systemen total abelsche Ideale vorkommen, die deutlich größer als das Zentrum sind.

Schwächen wir den Begriff „total abelsch“ noch weiter ab, so erhalten wir den aus der Lie-Theorie bereits bekannten Begriff „auflösbar“. Dazu definieren wir zunächst die abgeleitete Reihe.

3.27 Definition
Es seien T ein Lie-Tripel-System und $I \leq T$ ein Ideal. Die abgeleitete Reihe wird definiert durch

$$I^{(0)} := I, \quad I^{(n+1)} := [T, I^{(n)}, I^{(n)}].$$

Gilt $I^{(k)} = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so heißt das Ideal I ***auflösbar***.

Während wir bei den abelschen bzw. total abelschen Idealen nicht von einem größten solchen Ideal schreiben können, ist dies bei auflösbaren Idealen möglich.

3.28 Satz
Die Summe von zwei auflösbaren Idealen eines Lie-Tripel-Systems ist ein auflösbares Ideal. In jedem Lie-Tripel-System gibt es ein größtes auflösbares Ideal.

Beweis. Die Idealeigenschaft der Summe entnehmen wir [13, Lemma 2.2]. Die Existenz eines größten auflösbaren Ideals folgt nun aus der Endlichdimensionalität eines Lie-Tripel-Systems. □

Das größte auflösbare Ideal eines Lie-Tripel-Systems ist ein wesentlicher Bestandteil unserer Klassifikation.

3.29 Definition
Es sei T ein Lie-Tripel-System. Das größte auflösbare Ideal von T heißt ***Radikal*** von T. Wir bezeichnen es mit $\mathrm{rad}(T)$. Gilt $\mathrm{rad}(T) = 0$, so heißt T ***halbeinfach***.

Wir haben behauptet, dass „auflösbar" eine Abschwächung von „total abelsch" sei. Diese Information halten wir fest:

3.30 Satz
Es sei T ein Lie-Tripel-System. Jedes total abelsche Ideal von T ist auflösbar und somit im Radikal von T enthalten.

Beweis. Ist $I \trianglelefteq T$ ein total abelsches Ideal, so ist bereits $I^{(1)}$ nach Definition trivial, also I auflösbar. □

Aus diesem Satz können wir ein Kriterium für Halbeinfachheit von Lie-Tripel-Systemen folgern, bei welchen lediglich Informationen über total abelsche Ideale genutzt werden.

3.31 Satz
Ein Lie-Tripel-System ist genau dann halbeinfach, wenn jedes total abelsche Ideal verschwindet.

Beweis. Jedes total abelsche Ideal ist auflösbar. Das letzte nicht-triviale Ideal in einer abgeleiteten Reihe ist total abelsch. □

Analog zur Theorie der Lie-Algebren erhalten wir auch hier einen Satz, dass halbeinfache Lie-Tripel-Systeme lediglich Summen von einfachen Lie-Tripel-Systemen sind:

3.32 Satz
Es sei T ein halbeinfaches Lie-Tripel-System. Dann gibt es einfache Ideale $T_l \trianglelefteq$

$T, l = 1, \ldots, k$ derart, dass $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_k$ gilt.

Beweis. Wir verweisen auf [13, Theorem 2.9]. □

3.3 Riemannsche Lie-Tripel-Systeme

Die riemannschen symmetrischen Räume wurden in [20] und [21] bereits eingehend untersucht. Für unsere Zwecke sind lediglich die Erkenntnisse für einfache riemannsche symmetrische Räume wichtig. An dieser Stelle zitieren wir Resultate, auf die wir später verweisen möchten.

3.33 Definition
Es sei T ein Lie-Tripel-System. Die Abbildung

$$\varrho(x, y) = \mathrm{tr}(T \to T, z \mapsto [z, y, x])$$

heißt ***Ricci-Form***. Ein Lie-Tripel-System heißt ***kompakt***, wenn die Ricci-Form negativ definit ist. Ein Lie-Tripel-System heißt ***antikompakt***, wenn die Ricci-Form positiv definit ist.

Beim Dualisieren ändert sich das Vorzeichen der Ricci-Form.

3.34 Satz
Das Dual eines kompakten Lie-Tripel-Systems ist antikompakt. Das Dual eines antikompakten Lie-Tripel-Systems ist kompakt.

Beweis. Das Lie-Tripel-System heiße T, die Ricci-Form werde mit ϱ bezeichnet. Mit ϱ^* bezeichnen wir die Ricci-Form des Duals und erhalten

$$\varrho^*(x, y) = \mathrm{tr}(z \mapsto [z, y, x]^*) = -\mathrm{tr}(z \mapsto [z, y, x]) = -\varrho(x, y).$$

□

Es folgt die Definition der in der Überschrift genannten riemannschen Lie-Tripel-Systeme.

3.35 Definition
Ein Lie-Tripel-System heißt ***riemannsch***, wenn es Tangentialsystem eines riemannschen symmetrischen Raumes ist.

Mit dieser Definition können wir nicht gut arbeiten. Deshalb geben wir eine äquivalente Eigenschaft an, die auf die Struktur der Standardeinbettung eingeht.

3.36 Satz
Ein Lie-Tripel-System T ist genau dann riemannsch, wenn $\exp \operatorname{ad}[T, T]$ eine kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}(T)$ ist.

Beweis. Einen Beweis finden wir in [16, 2.5.8]. □

In [17, 2.1.46] finden wir sogar, dass es genügt, wenn die Untergruppe relativ kompakt ist. Nun kommen wir zur bereits zu Beginn des Abschnittes angekündigten Klassifikation der riemannschen Lie-Tripel-Systeme.

3.37 Satz
Jedes riemannsche Lie-Tripel-System ist eine direkte Summe eines abelschen, eines kompakten und eines antikompakten Ideals.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [20, Theorem 1.6 auf Seite 145]. □

Später werden wir diesen Satz für ein einfaches, riemannsches Lie-Tripel-System anwenden. Unter diesen Voraussetzungen liest sich der letzte Satz wie folgt.

3.38 Korollar
Jedes einfache, riemannsche, nicht-abelsche Lie-Tripel-System ist kompakt oder antikompakt.

3.4 Lie-Tripel-Geometrien

Wir wenden uns nun den Lie-Tripel-Systemen zu, die als Tangentialsystem symmetrischer stabiler Räume auftreten können. Zunächst werden wir einige einfache Folgerungen aus der Definition erarbeiten und uns einige Lie-Tripel-Systeme anschauen. Im Anschluss zitieren wir bekannte Klassifikationssätze.

3.4.1 Definitionen

In einem symmetrischen stabilen Raum ist jede Untergeometrie genügend großer Dimension wieder ein symmetrischer stabiler Raum. Übertragen wir dieses Resultat auf Lie-Tripel-Systeme, so erhalten wir, dass jeder Untervektorraum hinreichend großer Dimension wieder ein Lie-Tripel-System sein muss.

Deshalb definieren wir:

3.39 Definition
Es seien T ein Lie-Tripel-System und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum T sei

zusätzlich ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Verband der $\mathbb{K}$-Untervektorräume von T heißt ***Lie-Tripel-Geometrie über*** $\mathbb{K}$, falls

- jeder $\mathbb{K}$-Unterraum von T ein Lie-Tripel-Untersystem ist,
- die Gruppe $\exp \operatorname{ad}[T, T]$ aus $\mathbb{K}$-semilinearen Abbildungen besteht und
- die $\mathbb{K}$-Dimension von T mindestens zwei ist.

Wir schreiben in diesem Falle auch, dass T selbst eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$ ist und verzichten ggf. auf die Angabe des Körpers.

Eine Lie-Tripel-Geometrie T heißt einfach, halbeinfach bzw. abelsch, wenn das Lie-Tripel-System T die entsprechende Eigenschaft besitzt. Das Radikal einer Lie-Tripel-Geometrie T ist das Radikal des Lie-Tripel-Systems T.

Ist T eine Lie-Tripel-Geometrie, so bezeichnen wir die $\mathbb{K}$-Dimension des Lie-Tripel-Systems T als ***Rang*** von T.

Sind T_1 und T_2 zwei Lie-Tripel-Geometrien, so ist ein Homomorphismus zwischen den Lie-Tripel-Geometrien T_1 und T_2 ein Homomorphismus zwischen den Lie-Tripel-Systemen T_1 und T_2, der $\mathbb{K}$-Untervektorräume wieder auf solche abbildet.

Ist T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$ und U ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum des Lie-Tripel-Systems T, so ist U wieder eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$, wenn die Dimension von U mindestens zwei ist. In diesem Falle heißt U ***Lie-Tripel-Untergeometrie*** von T.

Eine Lie-Tripel-Geometrie vom Rang 2 bezeichnen wir als ***ebene Lie-Tripel-Geometrie***. Abhängig von $\mathbb{K}$ bezeichnen wir eine Lie-Tripel-Geometrie auch als reelle, komplexe oder quaterniale Lie-Tripel-Geometrie.

Die Rangbedingung für Lie-Tripel-Geometrien nehmen wir lediglich auf, um sie in späteren Sätzen nicht immer erwähnen zu müssen. Des Weiteren ist die in der Aufzählung als erste genannte Bedingung offensichtlich nichtsfordernd, falls $\dim_{\mathbb{K}}(T) = 1$.

Oben haben wir bereits eingesehen, dass Lie-Tripel-Geometrien Untergeometrien vom Rang 2 enthalten. Für unser Klassifikationsziel ist dies wichtig, da wir dadurch auf die Klassifikation der ebenen Lie-Tripel-Geometrien zurückgreifen können. Wir formulieren dies deshalb als Satz:

3.40 Satz
Es sei T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$ und U ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum des Lie-Tripel-Systems T. Gilt $\dim_{\mathbb{K}} U \geq 2$, so ist U eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$.

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition. □

In Satz 3.13 haben wir eingesehen, dass Eigenräume von involutorischen Automorphismen eines Lie-Tripel-Systems wieder Lie-Tripel-Systeme sind. Für Lie-Tripel-Geometrien gilt der Satz entsprechend.

3.41 Satz
Es sei T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}_1$ und $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$ ein Automorphismus des Lie-Tripel-Systems T. Dann ist die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(\sigma)$ von σ eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}_2$ mit $\dim\mathbb{K}_1 \in \{\dim\mathbb{K}_2, 2 \cdot \dim\mathbb{K}_2\}$, falls die Rangbedingung erfüllt ist. Analoges gilt für den Eigenraum zum Eigenwert -1.

Beweis. Wegen Satz 3.13 ist der Eigenraum E_λ ein Lie-Tripel-Untersystem. Da σ semilinear ist, ist E_λ ein $\mathbb{K}_2$-Vektorraum, wobei $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2$ gilt, falls σ linear ist, und ansonsten $\dim\mathbb{K}_1 = 2 \cdot \dim\mathbb{K}_2$. Für $x, y \in E_\lambda$ vertauschen σ und $\exp \mathrm{ad}[x, y]$. Demnach ist $\exp \mathrm{ad}[x, y]$ eine $\mathbb{K}_2$-semilineare Abbildung. Für $x, y, z \in E_\lambda$ ist das Produkt $[x, y, z]$ sowohl Element von $\mathrm{span}_{\mathbb{K}_1}\{x, y, z\}$ als auch des $\mathbb{K}_2$-Raumes E_λ. Folglich gilt $[x, y, z] \in \mathrm{span}_{\mathbb{K}_2}\{x, y, z\}$. Somit bilden die Eigenräume E_λ Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{K}_2$. □

Nach diesen zwei Beispielen für Lie-Tripel-Untersysteme wollen wir zunächst festhalten, warum wir uns mit Lie-Tripel-Geometrien beschäftigen.

3.42 Satz
Der Tangentialraum eines symmetrischen stabilen Raumes ist eine Lie-Tripel-Geometrie.

Beweis. Nach Satz 3.3 ist der Tangentialraum ein Lie-Tripel-System. Jeder Untervektorraum ist nach [10, 4.7] ein Lie-Tripel-Untersystem. □

Dem gerade zitierten Resultat [10, 4.7] entnehmen wir außerdem, dass die Tangentialräume von Untergeometrien genau die Lie-Tripel-Untersysteme sind.

Da wir Lie-Tripel-Geometrien erhalten, indem wir die Tangentialräume von symmetrischen stabilen Räumen berechnen, stellt sich die Frage, ob man diesen Weg auch in anderer Richtung beschreiten kann.

3.43 Definition
Eine Lie-Tripel-Geometrie T heißt ***integrierbar***, wenn es einen symmetrischen stabilen Raum gibt, dessen Tangentialraum isomorph zu T ist.

Die Existenz von integrierbaren Lie-Tripel-Geometrien ist klar, da wir bereits

Beispiele von symmetrischen stabilen Räumen gesehen haben. Es gibt auch nicht-integrierbare Lie-Tripel-Geometrien. Ein Beispiel findet man in [16, 4.4.1].

Diese nicht-integrierbaren Beispiele gibt es allerdings nur, wenn man mit echten Kalscheuer-Fastkörpern arbeitet. Dank Satz 2.4 ist das bei uns ab Rang 3 nicht notwendig bzw. möglich. Lie-Tripel-Geometrien vom Rang 2 sind, wie wir in Satz 3.71 sehen werden, bereits klassifiziert.

Zu integrierbaren Lie-Tripel-Geometrien gibt es symmetrische stabile Räume mit passender Struktur. Die Eindeutigkeit der symmetrischen stabilen Räume führt auf den Begriff der Starrheit.

3.44 Definition
Es sei M ein zusammenhängender symmetrischer stabiler Raum mit tangentialer Lie-Tripel-Geometrie T. Der symmetrische stabile Raum M heißt ***starr***, wenn er folgende Eigenschaft erfüllt:

- Ist N ein weiterer symmetrischer stabiler Raum mit tangentialer Lie-Tripel-Geometrie S und ist $\varphi : T \to S$ ein Isomorphismus von Lie-Tripel-Geometrien, so existiert ein Isomorphismus $\Phi : M \to N$ von symmetrischen stabilen Räumen, dessen Tangentialabbildung φ ist.

Eine Lie-Tripel-Geometrie T heißt ***starr***, wenn es einen starren symmetrischen stabilen Raum gibt, dessen Tangentialraum isomorph zu T ist.

Der hier eingeführte Starrheitsbegriff ist schwächer als der in [17] genutzte. Im folgenden Satz geben wir ein einfaches Kriterium für Starrheit an:

3.45 Satz
Hat ein symmetrischer stabiler Raum vom Rang mindestens 2 triviales Zentrum oder ist er einfach zusammenhängend, so ist er starr.

Beweis. Für Räume vom Rang mindestens 3 verweisen wir auf [10, 4.12]. Symmetrische Ebenen sind nach [17, 3.3.3, 3.4.29] starr. □

Alle konkreten Lie-Tripel-Geometrien, die wir als Beispiele gegeben haben, sind starr.

3.46 Satz
Klassische symmetrische stabile Räume sind starr. Symmetrische stabile Räume vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ sind starr.

Beweis. Zunächst untersuchen wir symmetrische stabile Räume mit abelscher Bewegungsgruppe. Der Raum heiße $\mathcal{M}$. Die tangentiale Lie-Tripel-Geometrie von $\mathcal{M}$ heiße $T_o(\mathcal{M})$. Der Tangentialraum in einem festen Punkt (im gewöhnlichen Sinne) von $T_o(\mathcal{M})$ heiße $T_0(T_o(\mathcal{M}))$. Dies ist ein abelscher symmetrischer stabiler Raum. Offensichtlich sind $T_o(\mathcal{M})$ und $T_0(T_o(\mathcal{M}))$ als Vektorräume isomorph. Da die Bewegungsgruppe von $\mathcal{M}$ abelsch ist, ist die Standardeinbettung von $T_o(\mathcal{M})$ abelsch und somit ist auch $T_o(\mathcal{M})$ abelsch. Wir folgern, dass die Lie-Tripel-Geometrien $T_o(\mathcal{M})$ und $T_0(T_o(\mathcal{M}))$ isomorph sind. Wegen der Vektorraumisomorphie zu einem passenden $\mathbb{K}^n$ und dem daraus folgenden einfachen Zusammenhang sind nach Satz 3.45 die symmetrischen stabilen Räume $\mathcal{M}$ und $T_o(\mathcal{M})$ isomorph. Insbesondere erkennen wir, dass $\mathcal{M}$ ein affiner Raum ist.

Wir betrachten nun die klassischen symmetrischen stabilen Räume mit nichtabelscher Bewegungsgruppe. In diesem Falle ist die Bewegungsgruppe nach Satz 2.34 zentrumsfrei. Folglich ist ein solcher Raum wegen Satz 3.45 starr.

Ein Raum vom Typ $(R+)$ ist nach Satz 2.29 einfach zusammenhängend, ein Raum vom Typ $(R-)$ hat nach Satz 2.27 triviales Zentrum. Zusammen mit Satz 3.45 sind beide Räume starr. $\square$

Für die Klassifikation der Lie-Tripel-Geometrien benötigen wir noch den Begriff der geometrisch zerfallenden Lie-Tripel-Geometrien.

3.47 Definition
Eine Lie-Tripel-Geometrie T über $\mathbb{K}$ heißt ***geometrisch zerfallend***, falls es ein $\mathbb{K}$-lineares total abelsches Ideal $I \trianglelefteq T$ mit $I \neq 0$ und $I \neq T$ gibt.

Mit dieser Definition kennen wir nun abelsche, einfache und geometrisch zerfallende Lie-Tripel-Geometrien. Unser Ziel in der Klassifikation ist, zu zeigen, dass dies alle Lie-Tripel-Geometrien sind. Für dieses Vorhaben geben wir noch zwei Sätze über Lie-Tripel-Geometrien an. Im ersten Satz betrachten wir die Struktur der inneren Derivationen etwas genauer. Im zweiten Satz untersuchen wir grob, welche Standardeinbettungen vorkommen können.

Zunächst also der Satz über innere Derivationen:

3.48 Satz
Es sei T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$ vom Rang n. Bei gewählter $\mathbb{K}$-Basis von T gibt es zu $x, y \in T$ eine Matrix $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und ein $m \in \mathbb{K}$ derart, dass $\mathrm{ad}[x,y] : T \to T, z \mapsto Mz + zm$ gilt.

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus der Forderung, dass $\exp \mathrm{ad}[x,y]$ eine semilineare Abbildung ist. $\square$

Nun folgt noch das Resultat über das Aussehen von Standardeinbettungen.

3.49 Satz
Es sei T eine integrierbare Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ vom Rang $n \geq 3$. Dann ist die Standardeinbettung die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe, die eine Darstellung auf $\mathbb{H}^{n+1}$ hat.

Beweis. Die Lie-Tripel-Geometrie T ist integrierbar. Demnach existiert ein zusammenhängender symmetrischer stabiler Raum, dessen Tangentialraum zu T isomorph ist. Der symmetrische stabile Raum ist nach Satz 2.4 isomorph zu einer Teilgeometrie des projektiven Raumes über $\mathbb{H}$.

Elemente der Bewegungsgruppe wirken auf dem symmetrischen stabilen Raum, also auf einer offenen Teilmenge des projektiven Raumes. Sie lassen sich nach [19] auf den gesamten projektiven Raum fortsetzen. Folglich gibt es eine Darstellung der Bewegungsgruppe auf $\mathbb{H}^{n+1}$.

Nach Satz 3.19 ist die Standardeinbettung von T isomorph zur Lie-Algebra der Bewegungsgruppe des Raumes. □

3.4.2 Klassische Lie-Tripel-Geometrien

Wir geben eine Konstruktionsvorschrift für Lie-Tripel-Systeme und zeigen, dass wir auf diese Weise die Tangentialsysteme der klassischen symmetrischen stabilen Räume erhalten.

3.50 Satz
Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ und f eine (schief)-hermitesche oder symmetrische Sesquilinearform auf $T = \mathbb{K}^n$. Durch

$$[x, y, z] = yf(x, z) - xf(y, z) + z(f(x, y) - f(y, x))$$

ist eine trilineare Abbildung auf $T \times T \times T$ gegeben, die T zu einem Lie-Tripel-System macht. Dieses Lie-Tripel-System bezeichnen wir mit $T(f)$. Offenbar ist $T(f)$ sogar eine Lie-Tripel-Geometrie, falls $n \geq 2$.

Beweis. Den Beweis führen wir durch Satz 3.61. □

Die definierenden Eigenschaften für ein Lie-Tripel-System können wir an dieser Stelle mit viel Fleiß nachrechnen. (Man beachte die Gleichung $f(xf(a, b), y) = f(b, a)f(x, y)$.) In Satz 3.61 werden wir den Inhalt des eben formulierten Satzes geschenkt bekommen. Aus diesem Grunde verzichten wir an dieser Stelle auf die Angabe der Rechnung.

In diesem Abschnitt wollen wir Lie-Tripel-Geometrien untersuchen, die wie im letzten Satz durch eine Sesquilinearform gegeben sind.

3.51 Definition
Eine Lie-Tripel-Geometrie T heißt ***klassisch***, wenn es eine Sesquilinearform f auf einem passenden $\mathbb{K}^n$ gibt, so dass T isomorph zu $T(f)$ ist.

Betrachten wir die beim letzten Satz benötigten Definitionen genauer, so finden wir heraus: Von $\mathbb{K}$-Sesquilinearformen kommende klassische Lie-Tripel-Geometrien sind Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{K}$. Dieser Zusammenhang ist naheliegend. In den meisten Sätzen werden wir die Körper aus diesem Grunde nicht nennen.

Das Dual einer klassischen Lie-Tripel-Geometrie ist wieder klassisch. Es lässt sich recht einfach angeben.

3.52 Satz
Die zu $T(f)$ duale Lie-Tripel-Geometrie ist $T(-f)$.

Beweis. Dies folgt direkt aus den Definitionen. □

Wir wollen zeigen, dass klassische Lie-Tripel-Geometrien abelsch, einfach oder geometrisch zerfallend sind. Dazu betrachten wir zunächst „Lie-Tripel-Geometrien vom Rang 1“, also Geraden. Wir unterscheiden diese nach der Sesquilinearform.

3.53 Satz
Es sei f eine nicht-verschwindende Sesquilinearform auf $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

- Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und f hermitesch, so ist $T(f)$ abelsch.
- Ist $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$ und f hermitesch, so ist $T(f)$ einfach.
- Ist $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ und f schiefhermitesch, so ist $T(f)$ halbeinfach.
- Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und f symmetrisch, so ist $T(f)$ abelsch.

Beweis. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist die Aussage klar; für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und f symmetrisch erkennt man die Gültigkeit der Aussage durch Hinschreiben der Definition des Lie-Tripel-Produktes, sowie Ausnutzen der Eindimensionalität von $T(f)$ und Kommutativität von $\mathbb{C}$.

In diesem Absatz sei $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$ und f hermitesch. Es sei $0 \neq I \trianglelefteq T(f)$ ein Ideal. Wir wählen $x \in I$ mit $x \neq 0$. Es gilt $0 \neq f(x,x) \in \mathbb{R}$. Für jedes $\alpha \in \mathrm{Pu}\mathbb{K}$ gilt $x \cdot f(x,x) \cdot 4\alpha = [x, x\alpha, x] \in I$. Demnach gilt $T(f) = x\mathbb{K} \subseteq I$ und wir erhalten, dass $T(f)$ einfach ist.

Nun betrachten wir $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ und f schiefhermitesch. Ohne Einschränkung können wir $f(x,y) = i^{-1}\overline{x}iy$ annehmen. Es sei $0 \neq x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H} = T(f)$. Es gilt $x\mathbb{C} \leq T(f)$, da die im Lie-Tripel-Produkt beteiligten Faktoren jeweils aus $\mathbb{C}$

stammen, also das Ergebnis in $\mathbb{C}$ liegt. Mit einem entsprechenden Argument sieht man ein, dass $x\mathbb{C}j \leq T(f)$ gilt. Mit den für alle $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$ geltenen Gleichungen $[x\alpha, x\alpha i, x\gamma] = x \cdot 4i\gamma||\alpha||^2$ und $[x\alpha j, x\alpha ij, x\gamma j] = -x \cdot 4i\gamma||\alpha||^2 j$ sieht man ein, dass die Untersysteme $x\mathbb{C}$ und $x\mathbb{C}j$ einfach sind. Die für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ geltenen Gleichungsketten $[x\alpha j, x\beta, x\gamma] = x\left(\beta\alpha\overline{\gamma} - \alpha\beta\overline{\gamma} + \gamma\alpha\overline{\beta} - \gamma\overline{\beta}\alpha\right) j = 0$ für Elemente von $[x\mathbb{C}j, x\mathbb{C}, x\mathbb{C}]$ und $[x\alpha, x\beta j, x\gamma j] = -x\left(\beta\alpha\overline{\gamma} - \alpha\beta\overline{\gamma} + \gamma\alpha\overline{\beta} - \gamma\overline{\beta}\alpha\right) = 0$ für Elemente von $[x\mathbb{C}, x\mathbb{C}j, x\mathbb{C}j]$ zeigen nun die Idealeigenschaft von $x\mathbb{C}$ bzw. $x\mathbb{C}j$. Das Lie-Tripel-System $T(f)$ ist demnach eine direkte Summe von zwei einfachen Idealen, also halbeinfach. □

Entsprechende Resultate wollen wir nun auch für Lie-Tripel-Geometrien höheren Ranges beweisen. Nicht jede klassische Lie-Tripel-Geometrie ist (halb)-einfach. Wir müssen also eine geeignete Bedingung finden: Das Radikal der Sesquilinearform muss verschwinden.

3.54 Satz
Es sei $n \geq 2$ und f eine (schief)-hermitesche oder symmetrische Sesquilinearform auf $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ mit $\mathrm{rad}(f) = 0$. Dann ist $T(f)$ einfach.

Beweis. Wir betrachten ein nicht-triviales Ideal $0 \neq I \trianglelefteq T(f)$.

Zunächst zeigen wir, dass es ein nicht-isotropes Element in I gibt. Wir wählen ein $0 \neq x \in I$ und können annehmen, dass $f(x, x) = 0$ gilt. Es sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $T(f)$ bzgl. f. Die Koordinaten von x bzgl. der Orthonormalbasis seien $x_1, \ldots, x_n$. Wegen der Isotropie von x gibt es zwei Koordinaten ungleich Null. Wir wählen $s, t \in \{1, \ldots, n\}$ mit $s \neq t$ und $x_s \neq 0 \neq x_t$ und berechnen $[x, e_s, e_t] \in I$. Für die unterschiedlichen Arten der Sesquilinearform rechnen wir einzeln:

- Ist f symmetrisch über $\mathbb{C}$, so gilt $e_s x_t = [x, e_s, e_t] \in I$. Das Element $e_s x_t$ ist nicht-isotrop.

- Ist f hermitesch mit $f(e_s, e_s) = f(e_t, e_t) = 1$, so gilt $e_s\overline{x_t} - 2e_t\mathrm{Im}(x_s) = [x, e_s, e_t] \in I$. Durch erneute Multiplikation mit e_s, e_t finden wir weitere Elemente von I. Lediglich die Koeffizienten von e_s, e_t können ungleich Null sein. Diese sind hier angegeben.

$$\begin{pmatrix} \overline{x_t} \\ -2\mathrm{Im}(x_s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\mathrm{Im}(x_s) \\ 2\mathrm{Im}(x_t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\mathrm{Im}(x_t) \\ -4\mathrm{Im}(x_s) \end{pmatrix}$$

  Berechnen wir $f(x, x)$ für x und die hier angegebenen Vektoren, so erhalten wir der Reihe nach quadratische Terme mit den Werten $x_{s,1}, \ldots, x_s s, 4$ und $x_{t,1}, \ldots, x_{t,4}$, die nicht alle gleichzeitig Null sein können, wenn $(x_s, x_t) \neq (0, 0)$ gilt. Demnach sind nicht alle diese Vektoren isotrop.

- Ist f hermitesch, jedoch die andere Bedingung des letzten Falles nicht erfüllt, so ändern sich lediglich einige Vorzeichen in der Rechnung. Die Argumentation von oben kann allerdings übernommen werden.

- Für eine schiefhermitesche Sesquilinearform über $\mathbb{H}$ übernehmen wir die Ideen, die wir gerade bei hermiteschen Sesquilinearformen genutzt haben. Den zu f gehörenden Antiautomorphismus von $\mathbb{H}$ bezeichnen wir mit κ_f. Wir können $\kappa_f(x) = i^{-1}\overline{x}i$ und somit $\kappa_f^2 = \mathrm{id}$ annehmen. Das Lie-Tripel-Produkt berechnen wir zu $e_s\kappa_f(x_t)+e_t(\kappa_f(x_s)-x_s) = [x, e_s, e_t] \in I$. Mit den Gleichungen $x_s = x_{s,1}+x_{s,2}i+x_{s,3}j+x_{s,4}ij$ und $x_t = x_{t,1}+x_{t,2}i+x_{t,3}j+x_{t,4}ij$ erhalten wir analog zu oben die folgenden Vektoren, wobei wir wieder nur die Koeffizienten von e_s und e_t angeben, da die anderen Null sind:

$$\begin{pmatrix} x_{t,1} + x_{t,2}i - x_{t,3}j - x_{t,4}ij \\ -2(x_{s,3}j + x_{s,4}ij) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2(x_{s,3}j + x_{s,4}ij) \\ 2(x_{t,3}j + x_{t,4}ij) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2(x_{t,3}j + x_{t,4}ij) \\ -4(x_{s,3}j + x_{s,4}ij) \end{pmatrix}$$

  Nicht alle diese Vektoren sind isotrop.

Nach dem bisher gezeigten enthält I also ein nicht-isotropes Element.

Wir wählen nun ein solches $x \in I$ mit $f(x, x) \neq 0$. Es gibt ein $y \in T(f)$ mit $f(x, y) = 0 \neq f(y, y)$. Durch die für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ geltende Gleichung $-xf(y, y)\alpha = [x, y, y\alpha] \in I$ erhalten wir $x\mathbb{K} \leq I$.

Sei x wie oben mit $x\mathbb{K} \leq I$ und $z \notin x\mathbb{K}$. Ist $f(x, z) \neq 0$, so betrachten wir $-xf(z, z) + z\,(2f(x, z) - f(z, x)) = [x, z, z] \in I$. Aus $x\mathbb{K} \leq I$ erhalten wir $z\,(2f(x, z) - f(z, x)) \in I$. Der Koeffizient $2f(x, z)-f(z, x)$ ist wegen $||f(x, z)||^2 = ||f(z, x)||^2 \neq 0$ ungleich Null. Demnach gilt $z \in I$. Ist $f(x, z) = 0$, so wählen wir ein $y \in T$ mit $f(x, y) \neq 0$ und erhalten $zf(x, y) - xf(y, z) = [x, z, y] \in I$. Hieraus folgt wieder $z \in I$. Wir erhalten in jedem Fall $z \in I$, was $T = I$ mit sich bringt. □

Bei der Untersuchung der klassischen Lie-Tripel-Geometrien fehlen nun nur noch diejenigen, bei denen das Radikal der Sesquilinearform nicht-trivial ist.

3.55 Satz
Jede klassische Lie-Tripel-Geometrie ist abelsch oder einfach oder geometrisch zerfallend.

Beweis. Die Lie-Tripel-Geometrie heiße T und es gelte $T = T(f)$ für eine Sesquilinearform $f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Ist $\mathrm{rad}(f) = 0$, so ist die Lie-Tripel-Geometrie

$T(f)$ nach Satz 3.54 einfach, da nach Definition von Lie-Tripel-Geometrien $n \geq 2$ gilt. Ist $\mathrm{rad}(f) \neq 0$, so beachten wir, dass das Radikal von f offenbar ein total abelsches Ideal von T ist. Direkt nach Definition ist es ein $\mathbb{K}$-linearer Unterraum. Demnach ist T abelsch oder geometrisch zerfallend. $\square$

Dem letzten Beweis entnehmen wir, dass im klassischen Fall das Radikal der Sesquilinearform und das Radikal des Lie-Tripel-Systems übereinstimmen.

3.56 Definition
In einer klassischen geometrisch zerfallenden Lie-Tripel-Geometrie heißt das Radikal der Sesquilinearform ***Zerfällungsideal***. Hat die Lie-Tripel-Geometrie Rang 2, so heißt das Radikal auch ***Zerfällungsgerade***.

Wie der nächste Satz zeigt, ist das Zerfällungsideal einer ebenen Lie-Tripel-Geometrie das einzige $\mathbb{K}$-lineare, echte Ideal einer geometrisch zerfallenden Lie-Tripel-Geometrie.

3.57 Satz
$\mathbb{K}$-lineare, echte Ideale einer klassischen, ebenen Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$ sind total abelsch.

Beweis. Das Ideal heiße I, die zur Ebene gehörende Sesquilinearform heiße f. Wir können $I \neq 0$ annehmen.

Sei $a \in I$ und $x \notin I$. Betrachten wir $-xf(a,a) + a(2f(x,a) - f(a,x)) = [x,a,a] \in I$, so erhalten wir aus der $\mathbb{K}$-Linearität von I zunächst $-xf(a,a) \in I$ und dann die Gleichung $f(a,a) = 0$.

Aus $-af(x,x) + x(2f(a,x) - f(x,a)) = [a,x,x] \in I$ ermitteln wir wieder mit der $\mathbb{K}$-Linearität von I zunächst $2f(a,x) - f(x,a) = 0$, daraus $||f(a,x)||^2 = 0$ und nun $f(a,x) = 0$.

Aus dem Gezeigten folgt $a \in \mathrm{rad}(f)$, somit $I \subseteq \mathrm{rad}(f)$ und mit der Formel für das Produkt in klassischen Lie-Tripel-Geometrien erkennt man, dass I ein total abelsches Ideal ist. $\square$

Von den riemannschen Lie-Tripel-Systemen wissen wir bereits, dass einfache, riemannsche Lie-Tripel-Systeme kompakt oder antikompakt sind. Im Satz 3.54 haben wir gezeigt, dass einige Lie-Tripel-Geometrien einfach sind. Im folgenden Satz zeigen wir, dass einige dieser Geometrien kompakt bzw. antikompakt sind.

3.58 Satz
Es sei $n \geq 1$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{K}\}$. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei $n \geq 2$. Weiterhin sei $f_\pm$ die bzgl. einer fest gewählen Basis durch die Matrix $\pm E_n$ gegebene hermitesche

Sesquilinearform auf $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$. Das Lie-Tripel-System $T(f_+)$ ist kompakt, das Lie-Tripel-System $T(f_-)$ ist antikompakt.

Beweis. Wir berechnen die Ricci-Form ϱ des Lie-Tripel-Systems. Es gilt $\varrho(x,y) = \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(z \mapsto [z,y,x])$. In der klassischen „Lie-Tripel-Geometrie" (im Falle $n = 1$ ist die Rangbedingung verletzt) $T(f_\pm)$ erhalten wir das Produkt $[z,y,x] = yf_\pm(z,x) - zf_\pm(y,x) + x(f_\pm(z,y) - f_\pm(y,z))$. Wir beweisen zunächst die Aussage für $f := f_+$. Die Aussage für $T(f_-)$ folgt dann direkt aus den Definitionen. Abkürzend schreiben wir $l := \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$.

Als erstes berechnen wir die Spur der Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, z \mapsto zf(y,x)$. Die Abbildung ist $\mathbb{K}$-semilinear, hat also Spur $nl \cdot \mathrm{Re} f(y,x)$.

Die Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, z \mapsto xf(y,z)$. Diese Abbildung ist ebenfalls $\mathbb{K}$-linear. Wir wählen eine Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bzgl. f derart, dass x und v_1 linear abhängig sind, und erhalten als Spur den Wert $l \cdot \mathrm{Re} f(y,x)$.

Durch die Umformung $yf(z,x)+xf(z,y) = (x+y)f(z,x+y)-xf(z,x)-yf(z,y)$ erkennen wir, dass es genügt die Spur von $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, z \mapsto xf(z,x)$ zu berechnen. Auch hier wählen wir eine passende Orthonormalbasis wie oben und erhalten als Spur $c \cdot f(x,x)$, wobei $c = 1$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $c = 0$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $c = -2$ für $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ gilt. Mit der obigen Umformung können wir die Spur von $z \mapsto yf(z,x)+xf(z,y)$ berechnen und erhalten $cf(x+y,x+y) - cf(x,x) - cf(y,y) = 2c \cdot \mathrm{Re} f(y,x)$.

Summieren wir die Spuren der einzelnen Abbildungen, so erhalten wir

$$\varrho(x,y) = (-nl - l + 2c) \cdot \mathrm{Re} f(y,x).$$

Demnach ist ϱ negativ definit, wenn wir $f = f_+$ beachten. $\square$

Mittels der nächsten Sätze bis zum Ende dieses Abschnittes möchten wir isomorphe klassische Lie-Tripel-Geometrien bereits an der Sesquilinearform erkennen.

Eine abelsche Lie-Tripel-Geometrie über beliebigen Körpern ist immer auch eine reelle Lie-Tripel-Geometrie. Bei nicht-abelschen Lie-Tripel-Geometrien können wir den zugehörigen Körper ermitteln — dieser ist eindeutig.

3.59 Satz
Ist eine nicht-abelsche, klassische Lie-Tripel-Geometrie sowohl eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}_1$ als auch eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}_2$, so gilt $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2$.

Beweis. Die Lie-Tripel-Geometrie sei $T(f)$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $\mathrm{rad}(f) = 0$ ist und setzen $m = \dim_{\mathbb{R}} T(f)$. Die Standardeinbettung ist — je nach f — eine der folgenden Lie-Algebren (mit passend gewähltem k):

$$\mathfrak{so}_{m+1}(\mathbb{R},k),\ \mathfrak{su}_{m/2+1}(\mathbb{C},k),\ \mathfrak{u}_{m/4+1}(\mathbb{H},k),\ \mathfrak{so}_{m/2+1}(\mathbb{C}),\ \mathfrak{u}^{\alpha}_{m/4+1}(\mathbb{H}).$$

Die Dimensionen dieser Lie-Algebren sind (in der gleichen Reihenfolge)

$$\frac{1}{2}m(m+1),\ \frac{1}{4}m(m+4),\ \frac{1}{8}m(m+10)+3,\ \frac{1}{4}m(m+2),\ \frac{1}{8}m(m+6)+1.$$

Die Dimension m ist bei komplexen Lie-Tripel-Geometrien mindestens 4 und bei quaternialen Lie-Tripel-Geometrien mindestens 8. Durch einzelne Rechnungen findet man jeweils heraus, dass diese Werte nur dann gleich sein können, wenn m unterhalb dieser Schranken liegt.

Folglich kann aus den zwei Werten $\dim T(f)$ und $\dim\left(T(f)+[T(f),T(f)]\right)$ der zugehörige Körper ermittelt werden, da die Standardeinbettung bekannt ist.

Es verbleibt der Fall $\mathrm{rad}(f)\neq 0$. Hat das Radikal von f Kodimension mindestens 2, so betrachten wir einen Unterraum, auf dem f nicht-entartet ist und wenden obiges Argument an.

Für den Rest des Beweises können wir also annehmen, dass das Radikal von f Kodimension 1 hat. Wählen wir eine Unterebene, auf der f nicht verschwindet, so erkennen wir an der Tabelle auf Seite 23, dass auch in diesem Fall an der Dimension der Standardeinbettung der zugehörige Körper erkannt werden kann. $\square$

Der folgende Satz ermöglicht uns das oben angekündigte Erkennen von isomorphen klassischen Lie-Tripel-Geometrien anhand der zugehörigen Sesquilinearformen.

3.60 Satz
Zwei klassische Lie-Tripel-Geometrien $T(f)$ und $T(g)$ sind genau dann isomorph, wenn beide Lie-Tripel-Geometrien abelsch sind und gleiche reelle Dimension haben oder die Sesquilinearformen f und g äquivalent sind.

Beweis. Sind die Sesquilinearformen f und g äquivalent, so ist jeder zugehörige Isomorphismus $x\mapsto Ax$ ein Isomorphismus der Lie-Tripel-Geometrien $T(f)$ und $T(g)$. Mit der Linearität von $x\mapsto Ax$ erhalten wir

$$\begin{aligned} A[x,y,z]_f &= A\Big(yf(x,z)-xf(y,z)+z\Big(f(x,y)-f(y,x)\Big)\Big) \\ &= Ayg(Ax,Az)-Axg(Ay,Az)+Az\Big(g(Ax,Ay)-g(Ay,Ax)\Big) \\ &= [Ax,Ay,Az]_g. \end{aligned}$$

Zwei abelsche, gleichdimensionale Lie-Tripel-Systeme sind natürlich isomorph.

Für die andere Beweisrichtung seien $T(f)$ und $T(g)$ isomorph. Dann sind die Standardeinbettungen dieser Lie-Tripel-Geometrien isomorph. Dem Beweis von Satz 3.59 entnehmen wir, dass dann g oder $-g$ äquivalent zu f ist.

Wir können daher annehmen, dass f äquivalent zu $-g$ ist. Nach dem bisher gezeigten gilt dann $T(g) \cong T(f) \cong T(-g) = T(g)^*$. Die Lie-Tripel-Geometrie $T(g)$ ist demnach selbstdual und somit abelsch. $\square$

Dank der bisherigen Untersuchungen sind wir nun in der Lage, das Tangentialsystem eines klassischen symmetrischen stabilen Raumes zu berechnen.

3.61 Satz
Das Tangentialsystem eines klassischen symmetrischen stabilen Raumes ist eine klassische Lie-Tripel-Geometrie.

Beweis. Der klassische symmetrische stabile Raum sei $M(f)$ mit einer $\mathbb{K}$-Sesquilinearform f und habe Rang $n \geq 2$. Wegen Satz 2.26 und Satz 3.8 können wir annehmen, dass die Sesquilinearform f in Normalform vorliegt. Nach Satz 2.24 ist die Bewegungsgruppe von $M(f)$ in $\mathrm{PU}^*(f)$ enthalten. Für die Berechnung des Tangentialsystems genügt es, wenn wir uns auf zusammenhängende Räume beschränken. In diesem Falle ist der Raum isomorph zu einer Faktorgruppe der Bewegungsgruppe.

Wir wählen den Punkt $o = (1, 0, \ldots, 0)\mathbb{R} \in M$. Die Spiegelung an o induziert auf der Lie-Algebra der Bewegungsgruppe die Involution $\sigma = \mathrm{Ad}\,\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$. Je nach f ist die Lie-Algebra der Bewegungsgruppe enthalten in

$$\mathfrak{u}^* = \left\{ X \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)} \,:\, X^*F + FX = 0 \text{ und } X|_{\mathrm{rad}(f)} = 0 \right\},$$

wobei $X^* = X$ bei symmetrischem f bzw. $X^* = \overline{X}$ bei (schief)-hermiteschem f und die Gramsche Matrix F der Sesquilinearform f Normalform hat: $F = \mathrm{diag}(E_k, -E_l, 0 \cdot E_m)$ mit $k + l + m = n + 1$ oder $F = i \cdot \mathrm{diag}(E_k, 0)$. Da f nicht verschwindet, ist der erste Diagonaleintrag von F ungleich Null.

Elemente von $\mathfrak{u}^*$ sind durch die Einträge auf und unterhalb der Diagonale eindeutig bestimmt. Das Lie-Tripel-System $T(\mathfrak{u}^*, \sigma)$ besteht aus Elementen, die nur in der ersten Zeile und Spalte Einträge ungleich Null haben. Der Diagonaleintrag verschwindet. Folglich hat $T(\mathfrak{u}^*, \sigma)$ maximal Dimension nk, wobei $k = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$ gilt. Wegen der Betrachtungen vom Kapitelbeginn ist $T(\mathfrak{u}^*, \sigma)$ das tangentiale Lie-Tripel-System von $M(f)$ und hat demnach Dimension nk, woraus wir schließen, dass die Lie-Algebra der Bewegungsgruppe mit oben genanntem $\mathfrak{u}^*$ übereinstimmt.

Wir wollen nun die Multiplikation berechnen: Dafür sei $X \in T \subseteq \mathfrak{u}^*$. Aus der Gleichung $X^*F + FX = 0$ erhalten wir die Darstellung

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \varphi(x) \\ x & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$$

mit einem $x \in \mathbb{K}^n$ und

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x^* F' & \text{falls } f \text{ hermitesch oder symmetrisch,} \\ ix^* F' & \text{falls } f \text{ schief-hermitesch,} \end{cases}$$

wobei F' die Gramsche Matrix der auf $(0 \times \mathbb{K}^n) \times (0 \times \mathbb{K}^n)$ eingeschränkten Sesquilinearform ist. Die oben mit X bezeichnete Matrix identifizieren wir mit x und berechnen für $x, y, z \in T$ wir

$$\begin{aligned} [x, y, z] &:= [[x, y], z] \\ &= \left[\left[\begin{pmatrix} 0 & \varphi(x) \\ x & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \varphi(y) \\ y & 0 \end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix} 0 & \varphi(z) \\ z & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \dots \\ &= x\varphi(y)z - y\varphi(x)z - z\varphi(x)y + z\varphi(y)x. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das gewünschte Resultat:

$$[x, y, z] = yg(x, z) - xg(y, z) + z(g(x, y) - g(y, x))$$

mit

$$g(x, y) = \begin{cases} x^* F' y & \text{falls } f \text{ hermitesch oder symmetrisch,} \\ -ix^* F' y & \text{falls } f \text{ schief-hermitesch.} \end{cases}$$

In dieser Darstellung sieht man, dass g eine (schief)-hermitesche oder symmetrische Sesquilinearform ist, also T ein klassisches Lie-Tripel-System. $\square$

Der letzte Satz zeigt insbesondere, dass klassische Lie-Tripel-Systeme wirklich Lie-Tripel-Systeme sind. Der Beweis von Satz 3.50 ist somit mit weniger lästigen Rechnungen vollbracht.

Bei symmetrischen stabilen Räumen haben wir bereits erwähnt, dass wir Isomorphietypen untersuchen wollen. Nun sind wir in der Lage, klassiche symmetrische stabile Räume recht einfach auf Isomorphie zu untersuchen.

3.62 Satz
Klassische, zusammenhängende symmetrische stabile Räume $M(f)$ und $M(g)$ sind genau dann isomorph, wenn sie abelsch und reell gleichdimensional sind oder wenn f und g äquivalent sind.

Beweis. Wir nutzen Satz 3.8 und Satz 3.60. $\square$

3.4.3 Lie-Tripel-Geometrien vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$

Nachdem wir im letzten Abschnitt die Tangentialsysteme der klassischen symmetrischen stabilen Räume bestimmt haben, fehlen noch diejenigen der symmetrischen stabilen Räume vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$. Die Bestimmung führen wir hier in zwei einzelnen Sätzen durch. Im Anschluss stellen wir einige Resultate über diese Lie-Tripel-Geometrien zusammen.

Wir beginnen mit symmetrischen stabilen Räumen vom Typ $(R-)$, die wir in Satz 2.27 eingeführt haben.

3.63 Satz
Es sei $n \geq 2$ und T das Tangentialsystem des symmetrischen stabilen Raumes vom Typ $(R-)$. Es gibt eine $\mathbb{H}$-Basis der Lie-Tripel-Geometrie T, so dass für alle $(a,x)^{tr}, (b,y)^{tr}, (c,z)^{tr} \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n-1} = T$ die Multiplikation durch

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ z \end{pmatrix}\right] = -\left(\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} bc - \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} ac + \begin{pmatrix} c \\ z \end{pmatrix} (ba - ab)\right)$$

gegeben ist.

Beweis. Die im Satz 2.27 angegebene Spiegelung induziert auf der Bewegungsgruppe (also gelte $a,b,c,d,e \in \mathbb{C}, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{H}, ad - bc = 1, ||e|| = 1$) die Involution

$$\begin{pmatrix} ae & be & & & \\ ce & de & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & & & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{d}\,\overline{e} & -\overline{c}\,\overline{e} & & & \\ -\overline{b}\,\overline{e} & \overline{a}\,\overline{e} & & & \\ \beta_1 j & -\alpha_1 j & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \beta_{n-1} j & -\alpha_{n-1} j & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Parameter bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{d} \\ -\overline{c} \\ -\overline{b} \\ \overline{a} \\ e^{-1} \\ \beta_k j \\ -\alpha_k j \end{pmatrix}.$$

Im Tangentialraum nutzen wir ebenfalls die Bezeichnungen $a, b, c, e, \alpha_k, \beta_k$. Hier wird aus der Gleichung $ad - bc = 1$ die Bedingung $a + d = 0$ und die Forderung $|e| = 1$ wird zu $e \in \mathbb{R}i$. Auf dem Tangentialraum, dessen Elemente mit $a, b, c \in \mathbb{C}, e \in \mathbb{R}i, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{H}$ die Form

$$\begin{pmatrix} a+e & b & & & \\ c & -a+e & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & & & 0 \end{pmatrix}$$

haben, induziert die Involution für die Parameter die tangentiale Involution

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ e \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\overline{a} \\ -\overline{c} \\ -\overline{b} \\ -e \\ \beta_k j \\ -\alpha_k j \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist durch die Bedingungen $a \in \mathbb{R}, b = \overline{c} \in \mathbb{C}, e \in \mathbb{R}i, \beta_k = \alpha_k j \in \mathbb{H}$ gegeben. Wir schreiben $iu = a + e, iv = b$ und erhalten mit $i\overline{u} = -a + e$ und $-i\overline{v} = \overline{b}$ für die Elemente des Eigenraums die Schreibweise

$$\begin{pmatrix} iu & iv & & & \\ -i\overline{v} & i\overline{u} & & & \\ \alpha_1 & \alpha_1 j & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} j & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Die (2×2)-Matrix oben links ist das i-fache der (2×2)-$\mathbb{C}$-Matrix des Quaternions $u + vj \in \mathbb{H} = \mathbb{H} \times 0^{n-1} \subseteq T$. Beachtet man den zusätzlichen Faktor i, so zeigt eine doppelte Kommutatorbildung die im Satz behauptete Gleichung. □

Es folgt die entsprechende Aussage für symmetrische stabile Räume vom Typ $(R+)$ aus Satz 2.29.

3.64 Satz
Es sei $n \geq 2$ und T das Tangentialsystem des symmetrischen stabilen Raumes vom Typ $(R+)$. Es gibt eine $\mathbb{H}$-Basis der Lie-Tripel-Geometrie T, so dass für alle $(a, x)^{tr}, (b, y)^{tr}, (c, z)^{tr} \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n-1} = T$ die Multiplikation durch

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} bc - \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} ac + \begin{pmatrix} c \\ z \end{pmatrix} (ba - ab)$$

gegeben ist.

Beweis. Die im Satz 2.29 angegebene Spiegelung induziert auf der Bewegungsgruppe (also gelte $a, b \in \mathbb{H}, r > 0, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{H}, ||a|| = 1 = ||b||$) die Involution

$$\begin{pmatrix} br^{-1} & & & & \\ & ar & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & & & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ar & & & & \\ & br^{-1} & & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Parameter bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ r \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \\ r^{-1} \\ \beta_k \\ \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Wie im letzten Beweis nutzen wir auch hier die gleichen Bezeichnungen im Tangentialraum. Die Elemente des Tangentialraumes haben mit den Parametern $a, b \in \mathrm{Pu}\mathbb{H}, r \in \mathbb{R}, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{H}$ die Form

$$\begin{pmatrix} b-r & & & & \\ & a+r & & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Involution induziert für die Parameter die tangentiale Involution

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ r \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \\ -r \\ \beta_k \\ \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist durch die Bedingungen $b = -a \in \mathrm{Pu}\mathbb{H}, r \in \mathbb{R}, \alpha_k = -\beta_k \in \mathbb{H}$ gegeben. Wir schreiben $d = a + r \in \mathbb{H}$ und erhalten für die Elemente des Eigenraumes die Schreibweise

$$\begin{pmatrix} -d & & & & \\ & d & & & \\ -\alpha_1 & \alpha_1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

In dieser Schreibweise lässt sich die doppelte Kommutatorbildung problemlos ausrechnen und man erhält die im Satz behauptete Gleichung. $\square$

Betrachten wir die Multiplikation, so sehen wir, dass die Lie-Tripel-Systeme dual zueinander sind. Die Formel des Produkts stimmt mit der Formel des Produkts im Lie-Tripel-System $T(f)$, wobei f eine symmetrische $\mathbb{C}$-Sesquilinearform mit Radikal der Kodimension 1 ist, überein. Die erste Komponente des Produktes können wir dort und hier auch anders schreiben:

3.65 Bemerkung
Die erste Komponente des Lie-Tripel-Produktes in den Lie-Tripel-Geometrien der letzten beiden Sätze lässt sich auch in der Form $-[[a, b], c]$ bzw. $[[a, b], c]$ schreiben, wobei hier der gewöhnliche Kommutator von zwei Quaternionen genutzt wird.

Wir werden die eben berechneten Lie-Tripel-Geometrien oft nutzen. Aus diesem Grunde geben wir ihnen einen Namen:

3.66 Definition
Die in Satz 3.63 und Satz 3.64 eingeführten Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$ heißen ***Lie-Tripel-Geometrien vom Typ*** $(R-)$ ***bzw.*** $(R+)$.

Lie-Tripel-Geometrien vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ und symmetrische Ebenen vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ wurden in [16] eingehend untersucht.

Bei den klassischen Lie-Tripel-Geometrien haben wir im Beweis von Satz 3.55 gesehen, dass das Radikal ein $\mathbb{K}$-Unterraum ist. Bei den Lie-Tripel-Geometrien der Sätze 3.63 und 3.64 hat das Radikal nicht diese Form.

3.67 Satz
Die Bezeichnungen seien wie in Satz 3.63 bzw. Satz 3.64. Es gilt $R := \mathbb{R} \times \mathbb{H}^{n-1} = \mathrm{rad}(T)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass R ein Ideal von T ist. Es seien $(a, x)^{tr} \in R$ und $(b, y)^{tr}, (c, z)^{tr} \in T$. Wegen $a \in \mathbb{R}$ folgt aus Bemerkung 3.65 sofort, dass die erste Komponente des Produktes verschwindet.

Zu zeigen ist noch die Auflösbarkeit von R. Nach dem eben Gezeigten gilt $R^{(1)} = [T, R, R] \subseteq 0 \times \mathbb{H}^{n-1}$. Setzen wir in das Lie-Tripel-Produkt $b = c = 0$ ein, so erhalten wir $R^{(2)} = [T, R^{(1)}, R^{(1)}] = 0$.

Ein Komplement von R ist isomorph zu $\mathrm{Pu}\mathbb{H}$. Mit der gewöhnlichen Lie-Algebren-Klammer versehen, ist $\mathrm{Pu}\mathbb{H}$ isomorph zu $\mathfrak{so}(3)$, also einfach. Demnach kann das Radikal von T nicht größer als R sein. $\square$

Dieses Resultat über das Radikal erläutert den in der oben genannten Arbeit ([16]) genutzen Namen: Lie-Tripel-Systeme mit großem Radikal.

Da das Radikal nicht trivial ist, erhalten wir sofort den folgenden Satz.

3.68 Satz
Lie-Tripel-Geometrien vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ sind nicht halbeinfach.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 3.67. $\square$

Wie bereits bei den klassischen Lie-Tripel-Geometrien untersuchen wir auch hier die Geraden. Zunächst betrachten wir ebene Lie-Tripel-Geometrien.

3.69 Satz
Ebene Lie-Tripel-Geometrien vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ enthalten genau eine abelsche Gerade. Diese Gerade ist ein total abelsches Ideal.

Beweis. Wir wählen eine Basis wie in Satz 3.63 bzw. Satz 3.64. Eine abelsche Gerade ist $0\times\mathbb{H}$ (vgl. Beweis von Satz 3.67). An der Formel für die Multiplikation erkennt man sofort, dass diese Gerade ein total abelsches Ideal ist. Jede andere Gerade hat die Form $(1,\alpha)^{tr}\mathbb{H}$ für passendes $\alpha \in \mathbb{H}$. Wir setzen $\varepsilon = 1$, falls die Lie-Tripel-Geometrie vom Typ $(R+)$ ist und $\varepsilon = -1$, falls sie vom Typ $(R-)$ ist. Die Multiplikation berechnen wir zu

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ \alpha a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ \alpha b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \alpha c \end{pmatrix}\right] = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} [[a,b],c].$$

Der Kommutator ist nicht identisch Null. Demnach ist die Gerade $(1,\alpha)^{tr}\mathbb{H}$ nicht abelsch. □

Für ebene Lie-Tripel-Geometrien vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ folgt aus der Rechnung im Beweis, dass die nicht-abelschen Geraden alle isomorph zueinander sind. Insbesondere haben nach Satz 3.67 alle nicht-abelschen Geraden ein eindimensionales Radikal, welches mit dem Zentrum übereinstimmt.

3.70 Satz
Nicht-abelsche Geraden einer Lie-Tripel-Geometrie vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ haben ein nicht-triviales Zentrum und sind deshalb nicht halbeinfach.

Beweis. Vgl. den Beweis von Satz 3.67. □

3.4.4 Ebene Lie-Tripel-Geometrien

Für unsere Klassifikation werden wir auf die bereits bekannte Klassifikation der ebenen Lie-Tripel-Geometrien (vgl. [17]) zurückgreifen. Die benötigten Resultate stellen wir hier zusammen.

3.71 Satz
Ebene Lie-Tripel-Geometrien sind integrierbar. Insbesondere ist jede ebene Lie-Tripel-Geometrie Tangentialsystem einer in der Tabelle auf Seite 23 genannten symmetrischen Ebene.

Beweis. Wir verweisen auf [17, 4.1.3] und erinnern daran, dass in unserer Arbeit eine ebene Lie-Tripel-Geometrie ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Die Ebenen über Kalscheuer-Fastkörpern und den Oktaven entfallen somit. □

Ein wesentlicher Punkt bei der Klassifikation ist der folgende Satz. Wir werden einen entsprechenden Satz für unser Projekt beweisen.

3.72 Satz
Ebene Lie-Tripel-Geometrien sind abelsch oder zentrumsfrei.

Beweis. Wir verweisen auf [17, 4.3.5]. □

Ein weiteres Resultat ist bei der Klassifikation der ebenen Lie-Tripel-Geometrien unverzichtbar und wird auch bei uns, für unsere Bedürfnisse angepasst, bewiesen werden.

3.73 Satz
Ebene Lie-Tripel-Geometrien sind abelsch, einfach oder geometrisch zerfallend.

Beweis. Wir verweisen auf [17, 4.3.6]. □

Wegen der bekannten Klassifikation der Ebenen können wir diverse Eigenschaften recht einfach aus anderen Eigenschaften folgern. Wir haben gesehen, dass nicht-klassische, ebene Lie-Tripel-Geometrien, also Lie-Tripel-Geometrien vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$, nicht einfach sind. Anders ausgedrückt:

3.74 Satz
Einfache ebene Lie-Tripel-Geometrien sind klassisch.

Beweis. Wir verweisen auf die Klassifikation der ebenen Lie-Tripel-Geometrien in Satz 3.71. Die nicht-klassischen Lie-Tripel-Geometrien sind die solche vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$. Diese sind nach Satz 3.68 nicht einfach. □

Ebenfalls wegen der Klassifikation kennen wir in allen ebenen Lie-Tripel-Geometrien die Multiplikation. Damit können wir berechnen:

3.75 Satz
Es seien T eine geometrisch zerfallende, ebene Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$, $I \trianglelefteq T$ ein total abelsches Ideal und $0 \neq a \in I$. Dann gilt $[a, T, T] = a\mathbb{K}$.

Beweis. In klassischen ebenen Lie-Tripel-Geometrien gilt für $x \in T$ mit $f(x, x) \neq 0, f(x, a) = 0$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ die Gleichung $[a, x, x\alpha] = -af(x, x)\alpha$. Nicht-klassische

Ebenen sind vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$. Nach Voraussetzung gilt in der gewöhnlichen Darstellung $a = (0, a)^{tr}$. Nun folgt $[(0, a)^{tr}, (1, b_2)^{tr}, (c_1, c_2)^{tr}] = \pm(0, a)^{tr} c_1$, woraus die Behauptung sofort folgt. $\square$

Klassische, geometrisch zerfallende, ebene Lie-Tripel-Geometrien sind durch eine beliebige, nicht-abelsche Gerade bereits eindeutig bestimmt. Dazu beweisen wir zunächst, dass in dieser Situation die Sesquilinearform eindeutig bestimmt ist.

3.76 Satz
Es sei $T = T(f)$ eine klassische, geometrisch zerfallende, ebene Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ und $G \leq T$ eine nicht-abelsche Gerade. Die zu T gehörende Sesquilinearform f ist eindeutig durch die Einschränkung auf G bestimmt.

Beweis. Eine $\mathbb{K}$-Basis $\{e_1, e_2\}$ von T sei so gewählt, dass die Sesquilinearform von T durch die Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{H}$ ausgedrückt werden kann. Es gibt Parameter β, γ derart, dass $G = (e_1\beta + e_2\gamma)\mathbb{K}$ gilt. Da G nicht abelsch ist, folgt $\beta \neq 0$ und ohne Einschränkung $\beta = 1$. Die Einschränkung der Sesquilinearform auf G hat die Matrix (α) und bestimmt somit die Sesquilinearform auf T eindeutig. $\square$

Das eigentliche Resultat schreiben wir nochmals zitierfähig nieder.

3.77 Korollar
Die Stuktur von klassischen, geometrisch zerfallenden, ebenen Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$ ist vollständig durch die Multiplikation in einer nicht-abelschen Geraden bestimmt.

Die Zerfällungsgerade einer geometrisch zerfallenden Lie-Tripel-Geometrie vom Rang 2 reicht offenbar nicht zur eindeutigen Bestimmung der Struktur der gesamten Lie-Tripel-Geometrie.

Bei der Klassifikation werden wir an einer Stelle total abelsche Ideale erkennen wollen. Ein Hilfsmittel dafür ist der folgende Satz.

3.78 Satz
Abelsche, $\mathbb{K}$-lineare, echte Ideale einer ebenen Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$ sind total abelsch.

Beweis. Für klassische Lie-Tripel-Geometrien verweisen wir auf Satz 3.57. Für nicht-klassische Lie-Tripel-Geometrien verweisen wir auf Satz 3.69 und merken an, dass wir das Ideal als Gerade annehmen können. $\square$

Zur Charakterisierung abelscher, ebener Lie-Tripel-Geometrien genügt es, wenn uns zwei abelsche Geraden vorliegen, von denen eine ein Ideal der Ebene ist.

3.79 Satz
Ebene Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$, die ein total abelsches, nicht-triviales Ideal und eine hiervon verschiedene abelsche Gerade besitzen, sind abelsch.

Beweis. Wegen des nicht-trivialen Ideals ist die Ebene nicht einfach. Ist die Ebene vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$, so ist nach Satz 3.69 die Zerfällungsgerade die einzige abelsche Gerade. Dieser Fall tritt also nicht ein. In klassischen, geometrisch zerfallenden Ebenen nutzen wir Satz 3.76 und erhalten einen Widerspruch. Demnach muss die Ebene abelsch sein. □

In Satz 3.48 haben wir eingesehen, dass die inneren Derivationen eine gewisse Form haben. Wählen wir einen Parameter aus einem Ideal, so sind diese Abbildungen sogar linear.

3.80 Satz
Es sei T eine ebene Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$, $I \trianglelefteq T$ ein nicht-triviales Ideal, $a \in I$ und $x \in T$. Dann ist $\mathrm{ad}[a,x] : T \to T$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung.

Beweis. Für klassische, ebene Lie-Tripel-Geometrien und Ebenen vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ rechnet man die Aussage anhand der bekannten Multiplikation nach. Laut Satz 3.71 sind dies alle Ebenen. □

3.4.5 Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$

Die Klassifikation der reellen bzw. komplexen Lie-Tripel-Geometrien ist bereits fertiggestellt. Einige Resultate aus [10] werden wir benötigen und deshalb hier vorstellen. Ein Teil der Resultate erinnert an ähnliche Aussagen, die wir bereits aus dem ebenen Fall kennen.

3.81 Satz
Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ vom Rang mindestens 3 sind klassisch.

Beweis. Für reelle Lie-Tripel-Geometrien verweisen wir auf [10, 6.8], für komplexe auf [10, 7.9]. □

In Satz 3.72 haben wir eingesehen, dass ebene Lie-Tripel-Geometrien abelsch oder zentrumsfrei sind. Ein analoger Satz ist auch in reellen Lie-Tripel-Geometrien beliebigen Ranges gültig.

3.82 Satz
Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{R}$ sind abelsch oder zentrumsfrei.

Beweis. Für Lie-Tripel-Geometrien vom Rang 2 nutzen wir Satz 3.72. Ist der Rang mindestens 3, so nutzen wir Satz 3.81 und rechnen den Rest mit der Sesquilinearform nach. □

Ebene Lie-Tripel-Geometrien sind abelsch, einfach oder geometrisch zerfallend. Entsprechendes gilt auch hier:

3.83 Satz
Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind abelsch, einfach oder geometrisch zerfallend.

Beweis. Für ebene Lie-Tripel-Geometrien steht die Behauptung in Satz 3.73. Ab Rang 3 folgern wir aus Satz 3.81, dass reelle bzw. komplexe Lie-Tripel-Geometrien klassisch sind. Mit Satz 3.55 erhalten wir nun die Behauptung. □

Wir wiederholen kurz eine Definition: Eine Lie-Tripel-Geometrie heißt reell, wenn jeder $\mathbb{R}$-Untervektorraum ein Untersystem ist. Wir müssen uns insbesondere die dreidimensionalen Unterräume anschauen. Dank des folgenden Satzes genügt es, wenn wir die zweidimensionalen Unterräume betrachten.

3.84 Satz
Es sei T ein Lie-Tripel-System. Für alle $x, y \in T$ gelte $[x, y, x] \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{x, y\}$. Dann ist T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{R}$.

Beweis. Wir verweisen auf [10, 6.6.1]. □

Eine einfache Folgerung aus diesem Satz lautet:

3.85 Satz
Es sei T ein Lie-Tripel-System. Für alle $x, y \in T$ gelte $[x, y, x] = 0$. Dann ist T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{R}$.

3.4.6 Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$

Für das Studium der quaternialen Lie-Tripel-Geometrien bietet es sich an, die vorkommenden Geraden zu typisieren. Wir werden jeder Gerade einer solchen Lie-Tripel-Geometrie einen Geradentyp zuweisen.

In den Abschnitten über klassische Lie-Tripel-Geometrien bzw. Lie-Tripel-Geometrien vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ haben wir bereits die Geraden untersucht.

Damit wir nicht immer wieder „einfache, kompakte Gerade“ und ähnliche Ausdrücke schreiben müssen, kürzen wir ab:

3.86 Definition
Eine Gerade G einer Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ heißt

- ***vom Typ*** (0), falls G abelsch ist,
- ***vom Typ*** (1), falls G einfach und kompakt ist,
- ***vom Typ*** (-1), falls G einfach und antikompakt ist,
- ***vom Typ*** (i), falls G halbeinfach, aber nicht einfach ist und
- ***vom Typ*** (R), falls G weder halbeinfach noch abelsch ist.

Offensichtlich haben wir somit jeder Geraden genau einen Typ zugewiesen. Mit den Informationen aus Satz 3.53 und Satz 3.70 erkennen wir, dass der Typ einer Geraden den Äquivalenztyp der Sesquilinearform, die die Multiplikation induziert angibt oder darauf hindeutet, dass die Gerade von einer Lie-Tripel-Geometrie vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ kommt.

Durch unsere Definition erhalten wir nicht-isomorphe Geraden gleichen Typs: Eine nicht-abelsche Gerade einer Lie-Tripel-Geometrie vom Typ $(R+)$ ist dual zu einer nicht-abelschen Geraden einer Lie-Tripel-Geometrie vom Typ $(R-)$. Beide Geraden haben jedoch Typ (R). Dies ist die einzige Situation, in der ein solches Verhalten auftritt. Unsere späteren Argumente stört dies nicht.

Eine entscheidende Frage für die Klassifikation der Lie-Tripel-Geometrien ist, welche ebenen Lie-Tripel-Geometrien als Untergeometrien in Frage kommen. Durch die Geradentypen können wir die Kombinationsmöglichkeiten einschränken.

3.87 Satz
In einer Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ existiere eine Gerade vom Typ (R). Dann besitzt die Lie-Tripel-Geometrie keine Gerade vom Typ (1), (-1) oder (i).

Beweis. Eine ebene Lie-Tripel-Geometrie, die eine Gerade vom Typ (R) enthält, ist nach Satz 3.53 und Satz 3.74 eine Ebene vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$. Ebenen dieser Art enthalten nach dem Beweis von Satz 3.69 nur Geraden vom Typ (R) und (0). Besäße die Lie-Tripel-Geometrie eine Gerade vom Typ z.B. (1), so enthielte die Lie-Tripel-Geometrie eine Unterebene mit Geraden vom Typ (R) und (1) im Widerspruch zum eben genannten. $\square$

Aus den bisher gezeigten Resultaten können wir einfach folgern, dass jede nicht-abelsche Ebene eine nicht-abelsche Gerade enthält.

3.88 Satz
Nicht-abelsche Lie-Tripel-Geometrien vom Rang 2 über $\mathbb{H}$ besitzen nicht-abelsche Geraden.

Beweis. Nicht-abelsche Ebenen besitzen nach Satz 3.71 eine Gerade vom Typ (1), (−1), (i) oder (R). Diese Geraden sind nach Definition des Geradentyps nicht abelsch. □

Aus diesem Satz folgt bereits, dass eine quaterniale, ebene Lie-Tripel-Geometrie, die nur abelsche Geraden besitzt, abelsch ist. Wir können sogar noch mehr zeigen:

3.89 Satz
Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$ vom Rang mindestens 2, die nur abelsche Geraden besitzen, sind abelsch.

Beweis. Die Lie-Tripel-Geometrie heiße T. Eine nicht-abelsche, ebene Lie-Tripel-Untergeometrie besitzt nach Satz 3.88 nicht-abelsche Geraden. Folglich ist jede Unterebene von T abelsch. Insbesondere gilt für alle $x, z \in T, \alpha \in \mathbb{H}$ die Gleichung $[x, x\alpha, z] = 0$, da $x, x\alpha, z$ immer in einer Ebene liegen.

Sei $x, y, z \in T$ und $\alpha \in \mathbb{H}$. Dann gilt $0 = [x + y, (x + y)\alpha, z] = [x, y\alpha, z] + [y, x\alpha, z]$ also $[x, y\alpha, z] = [x\alpha, y, z]$. Daraus erhalten wir $[x, y, z] = -[xijij, y, z] = -[xij, yij, z] = -[xijj, yi, z] = -[xijji, y, z] = -[x, y, z]$ und somit $[x, y, z] = 0$. □

Wegen der Nicht-Mischbarkeit gewisser Geradentypen können wir nun auch die ebenen Lie-Tripel-Geometrien angeben, die als Unterraum einer Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ vorkommen können.

3.90 Satz
In einer Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ sind alle nicht-abelschen Unterebenen klassisch oder alle nicht-abelschen Unterebenen vom Typ ($R+$) bzw. ($R-$)

Beweis. Angenommen, E_1 ist eine nicht-abelsche, klassische Unterebene und E_2 eine nicht-abelsche Unterebene vom Typ ($R+$) bzw. ($R-$). Satz 3.88 sichert in beiden Ebenen die Existenz nicht-abelscher Geraden. Wir wählen solche Geraden $G_i \leq E_i$ für $i = 1, 2$.

Die Gerade G_1 ist vom Typ (1), (−1) oder (i) und G_2 ist eine Gerade vom Typ (R). Insbesondere sind G_1 und G_2 verschieden.

Die Ebene $G_1 \oplus G_2$ enthält Geraden vom Typ (1), (−1) oder (i) und vom Typ (R). Nach Satz 3.87 ist dies nicht möglich. Wir erhalten einen Widerspruch. □

4 Klassifikation

Das Ziel dieses Abschnittes ist die vollständige Klassifikation von Lie-Tripel-Geometrien. Zunächst zeigen wir, dass jede Lie-Tripel-Geometrie abelsch, einfach oder geometrisch zerfallend ist oder großes Radikal hat. Dann betrachten wir die verschiedenen Möglichkeiten für Lie-Tripel-Geometrien vom Rang 3. Dieses Resultat werden wir zur Klassifikation der Lie-Tripel-Geometrien vom Rang n, $n \geq 3$ verallgemeinern. Am Ende wenden wir die Resultate auf symmetrische stabile Räume an.

4.1 Grobe Klassifikation von Lie-Tripel-Geometrien

Wie bereits in [17] und [14] zeigen wir zu Beginn, dass jede Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$ geometrisch zerfällt, also ein $\mathbb{K}$-lineares, total abelsches Ideal besitzt. Für den ebenen Fall finden wir dieses Resultat in [17, 4.3.6]. Im Falle $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ zitieren wir [10]. Da das Resultat dort nicht in dieser Form genannt ist, verweisen wir auf Satz 3.83 dieser Arbeit.

Für unsere Untersuchungen genügt es folglich, wenn wir $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ und Rang größer oder gleich 3 voraussetzen.

4.1 Satz
Jede Lie-Tripel-Geometrie ist abelsch oder zentrumsfrei.

Beweis. Die Lie-Tripel-Geometrie heiße T und sei nicht zentrumsfrei. Wir zeigen zunächst $[x, y, x] = 0$ für alle $x, y \in T$.

Wir wählen $a \neq 0$ aus dem Zentrum; $x, y \in T$ seien beliebig.
Liegen x, y, a in einer Ebene, so ist diese Ebene nicht zentrumsfrei, also nach Satz 3.72 abelsch, insbesondere gilt $[x, y, x] = 0$.
Erzeugen x, y, a einen Raum vom Rang 3, so betrachten wir

$$[x, y, x] = [x + a, y, x + a] = [x, y + a, x].$$

Da T eine Lie-Tripel-Geometrie ist, liegt dieses Element in

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{x, y\} \cap \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{x + a, y\} \cap \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{x, y + a\} = 0.$$

Es gilt also $[x, y, x] = 0$ für alle $x, y \in T$. Wegen Satz 3.85 ist T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{R}$ und somit nach Satz 3.82 abelsch oder zentrumsfrei. □

Nach Definition ist die Lie-Tripel-Klammer lediglich $\mathbb{R}$-linear in jedem Argument. Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen erhalten wir eine stärkere Aussage für das dritte Argument:

4.2 Satz
Es sei T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$ mit echtem Ideal $I \trianglelefteq T$, $I \neq T$, $x \in T$ und $a \in I$. Dann ist $\mathrm{ad}[a, x] : T \to T$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung.

Beweis. Der Rang von T sei n. Nach Satz 3.10 gibt es eine Matrix $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und ein $m \in \mathbb{K}$ derart, dass für alle $z \in T$ die Gleichung $\mathrm{ad}[a, x](z) = Mz + zm$ erfüllt ist.

Die Einschränkung von $\mathrm{ad}[a, x]$ auf eine beliebige Ebene, die a und x enthält, zeigt mit Satz 3.80, dass die Einschränkung $\mathbb{K}$-linear ist. Folglich können wir $m = 0$ annehmen und sehen, dass $\mathrm{ad}[a, x]$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist. $\square$

In den nächsten Sätzen untersuchen wir die Struktur der total abelschen Ideale. Ein Zwischenziel ist der Nachweis der Existenz eines größten total abelschen Ideals.

4.3 Satz
Es sei T eine nicht-abelsche Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$. Dann ist jedes total abelsche Ideal von T ein $\mathbb{K}$-Unterraum von T.

Beweis. Sei $0 \neq I \trianglelefteq T$ ein total abelsches Ideal und $0 \neq a \in I$. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Falls es ein $x \in T$ mit $[a, x, x] \neq 0$ gibt, so betrachten wir eine Unterebene $E \leq T$, die a und x enthält. Mit $I \cap E$ enthält sie ein nicht-triviales Ideal, wegen $[a, x, x] \neq 0$ ist sie nicht abelsch. Folglich ist E eine geometrisch zerfallende Ebene. Mit Satz 3.75 ergibt sich $a\mathbb{K} = [a, E, E] \leq I$ und daraus die Behauptung.

Wir betrachten den Fall, dass $[a, x, x] = 0$ für alle $x \in T$ gilt. Die Lie-Tripel-Geometrie T ist nicht abelsch, folglich nach Satz 4.1 zentrumsfrei. Demnach existieren $u, v \in T$ mit $0 \neq [a, u, v]$. Da T eine Lie-Tripel-Geometrie ist, gibt es $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ mit $[a, u, v] = a\alpha + u\beta + v\gamma$. Aus der Bedingung für diesen Fall folgt $0 = [a, u + v, u + v] = [a, u, v] + [a, v, u]$ und deshalb $[a, v, u] \neq 0$. Da a in einem total abelschen Ideal liegt, folgt mit Satz 4.2

$$\begin{aligned} 0 &= [a, u, [a, u, v]] \\ &= [a, u, a\alpha + u\beta + v\gamma] \\ &= [a, u, a]\alpha + [a, u, u]\beta + [a, u, v]\gamma \\ &= [a, u, v]\gamma, \end{aligned}$$

also $\gamma = 0$. Analog ergibt $[a, v, [a, u, v]] = 0$ die Gleichung $\beta = 0$. Zusammen haben wir $[a, u, v] = a\alpha$ mit $\alpha \neq 0$ ermittelt. Mit Satz 4.2 schließen wir

$$a\mathbb{K} = a\alpha\mathbb{K} = [a, u, v]\mathbb{K} = [a, u, v\mathbb{K}] \leq I$$

und erhalten die Behauptung. $\square$

4.4 Satz
Es sei T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$, $I \trianglelefteq T$ ein total abelsches Ideal und $U \leq I$ ein $\mathbb{K}$-Unterraum. Dann ist U ein total abelsches Ideal von T.

Beweis. Ist T abelsch, so ist die Aussage klar. Wir betrachten daher den Fall, dass T nicht abelsch ist. Nach Satz 4.3 ist I ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $X \leq T$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum-Komplement von I. Unter Berücksichtigung, dass $U + X$ ein $\mathbb{K}$-Unterraum und damit ein Untersystem ist, ermitteln wir

$$[U, T, T] = [U, I + X, I + X] \subseteq [U, X, X] \subseteq (U + X) \cap I \subseteq U.$$

Demnach ist U ein Ideal. Wegen $U \leq I$ ist es total abelsch. $\square$

4.5 Satz
Es sei T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$. Sind $I, J \trianglelefteq T$ total abelsche Ideale, so ist auch $I + J$ ein total abelsches Ideal.

Beweis. Die Idealeigenschaft von $I + J$ ist klar. Wir können annehmen, dass T nicht abelsch ist. Dann sind I und J nach Satz 4.3 $\mathbb{K}$-Vektorräume, deren Unterräume nach Satz 4.4 total abelsche Ideale von T sind. Es reicht also aus, wenn wir den Satz für endliche direkte Summen beweisen. Hierfür genügen zwei Summanden:

$$[T, I \oplus J, I \oplus J] \subseteq [T, I, J] + [T, J, I] \subseteq I \cap J = 0.$$

$\square$

Mit einem Korollar haben wir unser Zwischenziel erreicht:

4.6 Korollar
Es sei T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$. Dann gibt es ein größtes total abelsches Ideal.

4.7 Definition
Es sei T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{K}$. Das größte total abelsche Ideal bezeichnen wir als **Zerfällungsideal** und nutzen die Notation $\mathrm{Split}(T)$.

Direkt aus den Definitionen erkennen wir, dass diese Definition von Zerfällungsidealen bei klassischen, geometrisch zerfallenden Lie-Tripel-Geometrien mit der bisherigen Definition übereinstimmt.

4.8 Bemerkung
Nach Satz 4.3 ist das Zerfällungsideal $\mathrm{Split}(T)$ ein $\mathbb{K}$-Unterraum.

Nachdem wir nun das Zerfällungsideal definieren konnten, untersuchen wir im Folgenden ein Vektorraum-Komplement dessen. Wir wollen zeigen, dass im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ein solches Komplement selbst ein triviales Zerfällungsideal besitzt.

4.9 Lemma
Es sei $T = A \oplus B \oplus C$ eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$. $C \trianglelefteq A + B + C$ und $B \trianglelefteq A + B$ seien total abelsche Ideale. Es gelte $\dim_{\mathbb{H}} A = \dim_{\mathbb{H}} B = \dim_{\mathbb{H}} C = 1$. Dann ist $B \trianglelefteq A+B+C$ ein total abelsches Ideal. Insbesondere gilt $[A, B, C] = 0$.

Beweis. Wir führen den Beweis in einigen Teilschritten durch.

1. $B + C$ ist abelsch:

   Die Ebene $B + C$ enthält mit C ein total abelsches Ideal und mit B eine komplementäre abelsche Gerade. Nach Satz 3.79 ist die Ebene abelsch.

2. Der Unterraum B ist total abelsch in $A + B + C$:

   Wir beachten $B \trianglelefteq A + B$ und erhalten $[A+B+C, B, B] = [A, B, B] + [B + C, B, B] = 0$.

3. Für jede Gerade $D \leq B + C$ ist $D \trianglelefteq A + D$ ein total abelsches Ideal:

   Nach dem bisher gezeigten ist D abelsch. Wir beachten $C \trianglelefteq A+B+C$ und $B \trianglelefteq A+B$ und berechnen $[D, A+D, A+D] \subseteq [B+C, A+B+C, A+B+C] \subseteq B + C$. Daraus erhalten wir $[D, A + D, A + D] \subseteq (A + D) \cap (B + C) = D$. (Die letzte Gleichung gilt wegen der Dimensionen der Räume.) Demnach ist D ein abelsches $\mathbb{H}$-lineares Ideal von $A + D$ und nach Satz 3.78 sogar total abelsch in der Ebene $A + D$.

4. Für jedes $a \in A, b \in B$ ist $\mathrm{ad}[a, b] : T \to T$ eine $\mathbb{H}$-lineare Abbildung:

   Wir betrachten die Einschränkung $\mathrm{ad}[a, b]|_{A+B}$. Diese ist wegen Satz 4.2 $\mathbb{H}$-linear. Somit ist es auch $\mathrm{ad}[a, b]$.

5. Für jedes $a \in A, c \in C$ ist $\mathrm{ad}[a, c] : T \to T$ eine $\mathbb{H}$-lineare Abbildung:

   Diese Aussage folgt direkt aus Satz 4.2.

6. Es gilt $[A, B, C] = [A, C, B] = 0$:

   Es sei $\alpha \in \mathbb{H}$. Wir wählen je eine Basis von B und C und betrachten die Gerade $D := (1, \alpha)^{tr}\mathbb{H} \leq B + C$. In der Ebene $A \oplus D$ gilt bzgl. einer zur Zerlegung $A \oplus B \oplus C$ passenden Basis für alle $x, y \in \mathbb{H}$

$$0 = \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ \alpha y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ \alpha y \end{pmatrix} \right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ \alpha y \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ \alpha y \end{pmatrix}\right]$$
$$= \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha y \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Folglich gilt

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha y \end{pmatrix}\right] = -\left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Zusammen mit der $\mathbb{H}$-Linearität im dritten Argument erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] y\alpha y \\
= & -\left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] y\alpha y \\
= & -\left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right] \alpha y \\
= & \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \alpha y \\
= & \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha y \end{pmatrix}\right] \\
= & -\left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\
= & -\left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] y \\
= & \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha y \end{pmatrix}\right] y \\
= & \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \alpha y y
\end{aligned}$$

für jedes $x, y \in \mathbb{H}$. Auch $\alpha \in \mathbb{H}$ kann frei gewählt werden. Folglich gilt

$$0 = \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

und somit wegen der Linearität von $\mathrm{ad}[a, b]$ und $\mathrm{ad}[a, c]$ auch $[A, B, C] = [A, C, B] = 0$.

7. $B \trianglelefteq A + B + C$ ist ein Ideal:

   Die Definition eines Lie-Tripel-Systems ergibt $[B, A, C] = [A, B, C]$ und $[B, C, A] \subseteq [A, B, C] + [C, A, B] = [A, B, C] + [A, C, B]$. Nach dem letzten Punkt sind diese Systeme jeweils 0.

   Aus diesen Gleichungen, $B \trianglelefteq A + B$ und der Information, dass $B + C$ abelsch ist, erhalten wir $[B, A+B+C, A+B+C] \subseteq B + [B, A, C] + [B, C, A] = B$.

□

4.10 Korollar
Es sei T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$. Für jedes $\mathbb{H}$-Vektorraumkomplement H von $\mathrm{Split}(T)$ mit $\dim_{\mathbb{H}} H \geq 2$ gilt $\mathrm{Split}(H) = 0$.

Beweis. Wir schreiben $T = H_1 \oplus \mathrm{Split}(T) = (H_2 \oplus \mathrm{Split}(H_1)) \oplus \mathrm{Split}(T)$ als Vektorraum und wollen zeigen, dass $\mathrm{Split}(H_1) \oplus \mathrm{Split}(T)$ ein total abelsches Ideal von T ist. Wegen der Maximalität von $\mathrm{Split}(T)$ folgt dann $\mathrm{Split}(H_1) = 0$ und daraus unsere Behauptung.

Die Idealeigenschaft von $\mathrm{Split}(H_1) + \mathrm{Split}(T)$ ist offensichtlich. Wegen Satz 3.79 und Satz 3.89 ist $\mathrm{Split}(H_1) + \mathrm{Split}(T)$ abelsch. Wir erhalten $[H_2 + \mathrm{Split}(H_1) + \mathrm{Split}(T), \mathrm{Split}(H_1) + \mathrm{Split}(T), \mathrm{Split}(H_1) + \mathrm{Split}(T)] \subseteq [H_2, \mathrm{Split}(H_1), \mathrm{Split}(T)] + [H_2, \mathrm{Split}(T), \mathrm{Split}(H_1)]$. Die beiden Lie-Tripel-Produkte $[H_2, \mathrm{Split}(H_1), \mathrm{Split}(T)]$ und $[H_2, \mathrm{Split}(T), \mathrm{Split}(H_1)]$ haben wir bereits in Lemma 4.9 berechnet: Jedes einzelne Produkt darin verschwindet. Folglich ist $\mathrm{Split}(H_1)$ ein Ideal von $H_2 + \mathrm{Split}(H_1) + \mathrm{Split}(T)$ und es gilt $[H_2, \mathrm{Split}(H_1), \mathrm{Split}(T)] \subseteq \mathrm{Split}(H_1) \cap \mathrm{Split}(T) = 0$. Analog erhalten wir $[H_2, \mathrm{Split}(T), \mathrm{Split}(H_1)] = 0$ und daraus die Information, dass $\mathrm{Split}(H_1) + \mathrm{Split}(T)$ total abelsch ist. □

Ein Komplement des Zerfällungsideals ist also zerfällungsidealfrei. Aus dieser Eigenschaft wollen wir nun folgern, dass das Komplement $\mathbb{H}$-eindimensional oder einfach ist. Ist das Komplement nicht einfach, so erhalten wir eine Lie-Tripel-Geometrie vom Typ $(R+)$ oder $(R-)$. Diesen Fall untersuchen wir zunächst.

4.11 Satz
Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$, deren sämtliche Ebenen abelsch sind oder vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ sind, sind abelsch oder vom Typ $(R+)$ oder $(R-)$.

Beweis. Das Lie-Tripel-System heiße T und sei nicht abelsch. Dann gibt es nach Satz 3.89 eine Ebene vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ und somit eine Gerade vom Typ (R). Seien die Geraden $A, B_1, \ldots, B_{n-1}$ so gewählt, dass $T = A \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_{n-1}$ als Vektorraum gilt, A eine Gerade vom Typ (R) ist und für jedes $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ die Gerade B_i die Zerfällungsgerade der Lie-Tripel-Ebene $A \oplus B_i$ vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ ist.

In dieser Situation ist $B_i \trianglelefteq A \oplus B_i$ offensichtlich ein total abelsches Ideal. Wir zeigen, dass B_i sogar ein total abelsches Ideal von T ist.

1. Für jedes $j \neq i$ ist $B_i \oplus B_j$ eine Ebene, die zwei abelsche Geraden enthält. Nach Voraussetzung ist die Ebene vom Typ $(R+)$ oder $(R-)$ oder abelsch. Nach Satz 3.69 ist die Ebene abelsch.
2. Jede Gerade $D = (x, y)^{tr}\mathbb{H} \leq B_i \oplus B_j$ ist folglich abelsch.
3. Die Endomorphismen $\mathrm{ad}[a, x]$ und $\mathrm{ad}[a, y]$ von $A \oplus B_i \oplus B_j$ sind nach Satz 4.2 für alle $x \in B_i, y \in B_j, a \in A$ $\mathbb{H}$-linear.
4. In den Ebenen $A \oplus D$ erhalten wir bzgl. einer zur Summe $A \oplus B_i \oplus B_j$ passenden Basis die Gleichungskette

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}\right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

und daraus für alle $x, y \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] yx \\ = & \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}\right] x \\ = & -\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] x \\ = & -\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\ = & \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] y \\
&= -\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\right] y \\
&= -\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] xy \\
&= \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] xy.
\end{aligned}
$$

Da x, y nicht-kommutierend gewählt werden können, ergibt dies

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0.$$

Hieraus erhalten wir mit ähnlichen Rechnungen $[A, B_i, B_j] = 0$. Nun erhalten wir aus der Definition von Lie-Tripel-Systemen recht einfach die Informationen $[B_i, A, B_j] = [A, B_i, B_j] = 0$ und $[B_i, B_j, A] \subseteq [A, B_i, B_j] + [B_j, A, B_i] = 0$. Demnach gilt $[B_i, T, T] \subseteq [B_i, A, A] + 0 \subseteq B_i$, und wir erkennen, dass B_i ein Ideal von T ist.

5. Da die Summen $B_i \oplus B_j$ abelsch sind, erhalten wir direkt, dass B_i ein total abelsches Ideal von T ist.

Bisher haben wir gezeigt, dass die Geraden B_i jeweils total abelsche Ideale von T sind. Mit Satz 4.5 erhalten wir, dass das Zerfällungsideal Kodimension 1 hat. Die Gerade A ist eine komplementäre Gerade vom Typ (R).

Nun können wir nachrechnen, dass das Lie-Tripel-Produkt die gewünschte Eigenschaft besitzt. Für die Rechnung nehmen wir an, dass $A \oplus B_1$ vom Typ $(R+)$ ist. Dann sind alle $A \oplus B_i$ von diesem Typ. Wir wollen zeigen, dass dann auch T den Typ $(R+)$ hat. Dafür betrachten wir $a_1, a_2 \in A$ und $b_1 + \ldots + b_{n-1} \in B_1 \oplus \ldots \oplus B_{n-1}$ und berechnen $[b_1 + \ldots + b_{n-1}, a_1, a_2] = [b_1, a_1, a_2] + \ldots + [b_{n-1}, a_1, a_2] = b_1 a_1 a_2 + \ldots + b_{n-1} a_1 a_2 = (b_1 + \ldots + b_{n-1}) a_1 a_2$. Diese und weitere ähnliche Rechnungen zeigen, dass T vom Typ $(R+)$ ist.

Hat $A \oplus B_1$ den Typ $(R-)$, so verlaufen die Argumente analog und die Rechnungen erhalten zusätzlich negative Vorzeichen. In diesem Falle erhalten wir, dass T vom Typ $(R-)$ ist. □

Zu untersuchen bleibt der Fall, der auf einfache Komplemente des Zerfällungsideals führt. Wegen des letzten Satzes können wir als zusätzliche Voraussetzung annehmen, dass alle nicht-abelschen Unterebenen klassisch sind. Für die folgenden Sätze erinnern wir daran, dass Lie-Tripel-Geometrien immer Rang mindestens 2 haben.

4.12 Satz
Es sei T eine nicht-halbeinfache, Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$. Alle Lie-Tripel-Unterebenen von T seien klassisch. Dann gilt $\mathrm{Split(T)} \neq 0$.

Beweis. Ist T nicht-halbeinfach, so existiert nach Satz 3.31 ein total abelsches Ideal $0 \neq I \leq T$. Satz 4.3 entnehmen wir, dass I ein $\mathbb{K}$-linearer Raum ist. Direkt nach Definition gilt somit $\mathrm{Split}(T) \neq 0$. □

Die Aussage des Satzes können wir auch wie folgt formulieren.

4.13 Korollar
Es sei H eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ mit $\mathrm{Split}(H) = 0$. Alle Lie-Tripel-Unterebenen von H seien klassisch. Dann ist H halbeinfach.

Mit den folgenden zwei Resultaten untersuchen wir die halbeinfachen Lie-Tripel-Geometrien weiter. Zunächst betrachten wir Lie-Tripel-Systeme mit sehr kleiner Standardeinbettung.

4.14 Lemma
Es sei A ein halbeinfaches Lie-Tripel-System mit $\exp \mathrm{ad}[A, A] = \mathrm{SO}(2)$ und Standardeinbettung ungerader Dimension. Dann gilt $\dim_{\mathbb{R}} A = 2$.

Beweis. Nach Satz 3.32 ist A eine Summe von einfachen Lie-Tripel-Systemen

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n.$$

Wir berechnen

$$[A, A] = [A_1, A_1] \oplus \cdots \oplus [A_n, A_n]$$

und erhalten wegen $[A_i, A_i] \neq 0$ und $\exp \mathrm{ad}[A, A] = \mathrm{SO}(2)$ die Folgerung $n = 1$. Demnach ist A einfach.

Da $\exp \mathrm{ad}[A, A]$ nach Voraussetzung kompakt ist, ist das Lie-Tripel-System A nach Satz 3.36 riemannsch.

Ein einfaches, riemannsches, nicht-abelsches Lie-Tripel-System ist nach Satz 3.38 kompakt oder antikompakt. Durch eventuelles Dualisieren können wir annehmen, dass A antikompakt ist; $[A, A]$ und die Dimension der Standardeinbettung werden beim Dualisieren nicht verändert.

Die Antikompaktheit von A ergibt, dass $[A, A]$ maximal kompakt in der Standardeinbettung ist. Diese ist nach Satz 3.24 eine einfache Lie-Algebra oder Summe zweier isomorpher Ideale, also von gerader Dimension. Die Standardeinbettung ist demnach eine einfache Lie-Algebra mit eindimensionaler maximal kompakter Unteralgebra, also nach der Klassifikation der einfachen Lie-Algebren eine $\mathfrak{sl}(2)$. Folglich gilt $\dim_{\mathbb{R}} A = 2$. □

Wie der nächste Satz zeigt, sind halbeinfache Lie-Tripel-Geometrien einfach. Für eine bessere Beweistechnik untersuchen wir auch „Lie-Tripel-Geometrien", die die Rangbedingung verletzen.

4.15 Satz
Es seien T eine „Lie-Tripel-Geometrie" über $\mathbb{H}$ vom Rang mindestens 1 und $0 \neq A, B \trianglelefteq T$ zwei Ideale. Gilt $T = A \oplus B$, so ist T abelsch oder eine Gerade vom Typ (i).

Beweis. Wir betrachten eine minimale Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$, die als Summe von zwei Idealen geschrieben werden kann und nicht abelsch ist.

Wir führen eine Fallunterscheidung durch und betrachten zunächst den Fall, dass A und B jeweils $\mathbb{H}$-lineare Unterräume von T sind.

Sei $\varphi : A \to B$ eine $\mathbb{H}$-lineare Abbildung. Dann ist $\{a + \varphi(a) \,:\, x \in A\} \leq T$ ein $\mathbb{H}$-linearer Unterraum und somit eine Lie-Tripel-Geometrie. Durch Ausnutzen der Idealeigenschaft von A und B erhalten wir die Gleichung $[x+\varphi(x), y+\varphi(y), z+\varphi(z)] = [x, y, z]+[\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)]$. Andererseits ist $[x+\varphi(x), y+\varphi(y), z+\varphi(z)] = a+\varphi(a)$ für ein $a \in A$. Wir erhalten die Gleichung $\varphi([x, y, z]) = [\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)]$ und erkennen, dass φ ein Homomorphismus von Lie-Tripel-Systemen ist.

Mit φ ist auch 2φ eine $\mathbb{H}$-lineare Abbildung, also ein Homomorphismus. Folglich gilt für jedes solche φ die Gleichung

$$2[\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)] = 2\varphi([x, y, z]) = [2\varphi(x), 2\varphi(y), 2\varphi(z)] = 8[\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)],$$

woraus wir zunächst $[\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)] = 0$ und dann $\varphi([x, y, z]) = 0$ für alle $x, y, z \in A$ und für alle $\mathbb{H}$-linearen Abbildungen $\varphi : A \to B$ folgern. Insbesondere erhalten wir hieraus, dass A abelsch ist.

Mit analogen Argumenten erhalten wir, dass B abelsch ist und folgern daraus, dass T abelsch ist.

Wir kommen nun zum Fall, dass nicht beide Ideale $\mathbb{H}$-lineare Räume sind. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass B nicht $\mathbb{H}$-linear ist.

Wir definieren $B' := \operatorname{span}_{\mathbb{H}} B$ und unterscheiden, ob $B' \neq T$ oder $B' = T$ gilt.

Falls $B' \neq T$ gilt, so erkennen wir an der Gleichung $B' = (A \cap B') \oplus B$, dass sich B' als Summe von zwei nicht-trivialen Idealen schreiben lässt. Wegen der

Minimalität von T ist B' und somit B abelsch. Als abelsches Ideal liegt B im Zentrum von T. Nach Satz 4.1 ist T abelsch.

Gilt $B' = T$, so setzen wir $n = \dim_{\mathbb{H}} T$ und erkennen, dass B eine $\mathbb{H}$-Basis von T enthält. Da $\exp \mathrm{ad}[A, A]$ hierauf trivial wirkt, erhalten wir $\exp \mathrm{ad}[A, A] \leq \mathrm{Aut}\mathbb{H} = \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$, also $\exp \mathrm{ad}[A, A] \in \{1, \mathrm{SO}_2\mathbb{R}, \mathrm{SO}_3\mathbb{R}\}$.

Falls $\exp \mathrm{ad}[A, A] = 1$, so ist A ein abelsches Ideal von T, welches deswegen nicht zentrumsfrei ist und nach Satz 4.1 somit abelsch.

Im Falle $\exp \mathrm{ad}[A, A] = \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ erhalten wir wegen $\dim \mathrm{Fix} \exp \mathrm{ad}[A, A] = n$ und wegen der in B enthaltenden $\mathbb{H}$-Basis von T die Information $\dim B = n$. Aus der Wirkung von $\exp \mathrm{ad}[A, A]$ lesen wir $B = \mathbb{R}^n \leq \mathbb{H}^n$ ab. Folglich gilt $\dim A = 3n$ und $A = (\mathrm{Pu}\mathbb{H})^3$ und wir erkennen, dass A eine $\mathbb{H}$-Basis von T enthält. Demnach gilt $\exp \mathrm{ad}[B, B] \leq \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$. Wegen $A \leq \mathrm{Fix} \exp \mathrm{ad}[B, B]$ und $\dim A = 3n$ folgern wir $\exp \mathrm{ad}[B, B] = 1$. Demnach ist B ein abelsches Ideal und T wie oben nicht zentrumsfrei, also abelsch.

Es verbleibt der Fall $\exp \mathrm{ad}[A, A] = \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$. Aus der Wirkung von $\exp \mathrm{ad}[A, A]$ lesen wir $B = \mathbb{C}^n$ und $A = (\mathbb{C}j)^n$ ab. Folglich enthält auch A eine $\mathbb{H}$-Basis von T und wir können durch analoge Argumente erkennen, dass auch $\exp \mathrm{ad}[B, B] = \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ gilt. Nach Satz 4.14 gilt dann $\dim A = \dim B = 2$. Somit gilt $\dim T = 4$ und T ist eine Gerade vom Typ (i). □

Wir wenden den letzten Satz auf halbeinfache Lie-Tripel-Geometrien an und notieren das wichtige Resultat als Satz:

4.16 Satz
Es sei T eine halbeinfache Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$. Dann ist T einfach.

Beweis. Eine halbeinfache, nicht einfache Lie-Tripel-Geometrie kann als Summe von mindestens zwei einfachen Idealen geschrieben werden. Für den Rest zitieren wir Satz 4.15. □

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum bedeutenden Satz dieses Abschnittes:

4.17 Satz
Es sei T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$. Dann ist T abelsch oder eine Summe von $\mathrm{Split}(T)$ und einem halbeinfachen Lie-Tripel-System oder T ist vom Typ $(R+)$ oder $(R-)$.

Beweis. Enthält T eine Gerade vom Typ (R), so ist T nach Satz 3.90 und Satz 4.11 vom Typ $(R+)$ oder $(R-)$.

Hat T keine Gerade vom Typ (R), so schreiben wir $T = H + \mathrm{Split}(T)$. Wegen Bemerkung 4.8 kann H als $\mathbb{H}$-Raum gewählt werden und ist somit ein Lie-Tripel-Untersystem und — falls $\dim_{\mathbb{H}} H \geq 2$ — auch eine Lie-Tripel-Untergeometrie. Gilt $\dim_{\mathbb{H}}(H) = 1$, so wählen wir eine Ebene, die H enthält und erhalten durch die Klassifikation der Ebenen, dass H halbeinfach ist. Gilt $\dim_{\mathbb{H}}(H) \geq 2$, so erhalten wir aus Satz 4.10 die Information $\mathrm{Split}(H) = 0$ und dadurch mit Satz 4.13, dass H halbeinfach ist. Nach Satz 4.16 ist H in diesem Fall sogar einfach. □

Zusammenfassend können wir das Analogon zu [17, 4.3.6] formulieren.

4.18 Satz
Jede Lie-Tripel-Geometrie ist abelsch, einfach, geometrisch zerfallend oder vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$.

4.2 Geometrisch zerfallende Lie-Tripel-Geometrien

Im Folgenden untersuchen wir geometrisch zerfallende Lie-Tripel-Geometrien. Auch hier sind die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder Rang 2 bereits bekannt.

Für unsere Untersuchungen genügt es folglich, wenn wir $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ und Rang größer oder gleich 3 voraussetzen. Zunächst betrachten wir Lie-Tripel-Geometrien vom Rang 3. Hat das Zerfällungsideal Rang 3, so ist die Lie-Tripel-Geometrie abelsch. In zwei separaten Sätzen untersuchen wir die Lie-Tripel-Geometrien mit Zerfällungsideal vom Rang 1 bzw. 2.

Als erstes betrachten wir geometrisch zerfallende Lie-Tripel-Geometrien, deren Zerfällungsideal eine Gerade ist.

4.19 Satz
Geometrisch zerfallende Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$ vom Rang 3 mit einem Zerfällungsideal vom Rang 1 sind klassisch.

Beweis. Wir bezeichnen die Lie-Tripel-Geometrie mit T. Mit H bezeichnen wir ein $\mathbb{H}$-Vektorraumkomplement des Zerfällungsideals. Dieses ist eine einfache Unterebene. Die Ebene H ist nach Satz 3.74 klassisch. Nach Satz 3.90 sind alle Unterebenen von T klassisch. Folglich gibt es für jede Ebene $E \leq T$ genau eine Sesquilinearform σ_E auf $E \times E$, so dass für die Lie-Tripel-Klammer in der Ebene E die Gleichung

$$[x, y, z]_E = y\sigma_E(x, z) - x\sigma_E(y, z) + z(\sigma_E(x, y) - \sigma_E(y, x))$$

gilt.

Wir definieren eine Sesquilinearform σ auf $T \times T$ durch sesquilineare Fortsetzung von

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} \sigma_H(x,y) & \text{falls } x,y \in H \\ 0 & \text{falls } x \in \operatorname{Split}(T) \text{ oder } y \in \operatorname{Split}(T) \end{cases}$$

und müssen nur zeigen, dass σ das richtige Lie-Tripel-Produkt auf der gesamten Lie-Tripel-Geometrie T induziert. Dafür betrachten wir im nächsten Absatz Ebenen, danach den gesamten Raum.

Offensichtlich induziert σ in der Ebene H das richtige Lie-Tripel-Produkt. Sei $E \leq T$ eine andere Ebene. Dann gilt $E = a\mathbb{K} \oplus y\mathbb{K}$ mit $a \in H$ und $y \in T$. Die Sesquilinearform σ_E ist nach Satz 3.76 durch die Einschränkung auf $a\mathbb{K} \times a\mathbb{K}$ eindeutig bestimmt, hier identisch der Sesquilinearform σ_H und somit auch identisch σ.

Betrachte nun $x, y \in H$ Die Abbildung $\operatorname{ad}[x,y]$ hat nach Satz 3.48 bzgl. einer zur Darstellung $H \oplus \operatorname{Split}(T)$ passenden Basis die Form

$$[x,y,u] = \operatorname{ad}[x,y](u) = Mu + um \quad \text{für alle } u \in T \tag{1}$$

mit einer (3×3)-$\mathbb{K}$-Matrix M und $m \in \mathbb{K}$. Den Wert m können wir, wie wir im letzten Absatz gezeigt haben, in einer beliebigen (klassischen) Ebene, die x und y enthält, mit Hilfe der Sesquilinearform berechnen und erhalten hierfür

$$m = \sigma(x,y) - \sigma(y,x).$$

Wählen wir $u \in \operatorname{Split}(T)$, so ist von der Matrix M nur der Wert unten rechts wichtig. Diesen bezeichnen wir mit $\gamma(x,y)$. Die Abbildung $\gamma : H \times H \to \mathbb{H}$ ist $\mathbb{R}$-bilinear und schiefsymmetrisch.

Wir berechnen für $z \in \operatorname{Split}(T)$ und $\alpha \in \mathbb{H}$ den Ausdruck $[x, y\alpha, z] + [y, x\alpha, z]$ zweimal — einmal mit Hilfe der Sesquilinearform σ und einmal als Bild von $\operatorname{ad}[x, y\alpha] + \operatorname{ad}[y, x\alpha]$.

In der ersten Rechnung schreiben wir den Ausdruck als Summe von drei Lie-Tripel-Produkten, die jeweils in einer Unterebene berechnet werden können. Nach dem bisher gezeigten stimmt die Sesquilinearform einer Unterebene mit der Einschränkung von σ auf die entsprechende Unterebene überein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} [x, y\alpha, z] + [y, x\alpha, z] &= [x+y, (x+y)\alpha, z] - [x, x\alpha, z] - [y, y\alpha, z] \\ &= z(\sigma(x+y, (x+y)\alpha) - \sigma((x+y)\alpha, x+y) \\ &\qquad -\sigma(x, x\alpha) + \sigma(x\alpha, x) - \sigma(y, y\alpha) + \sigma(y\alpha, y)) \\ &= z\left(\sigma(x, y\alpha) + \sigma(y, x\alpha) - \sigma(x\alpha, y) - \sigma(y\alpha, x)\right). \end{aligned}$$

Nutzen wir hingegen die Abbildungen $\operatorname{ad}[x, y\alpha]$ und $\operatorname{ad}[y, x\alpha]$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} [x, y\alpha, z] + [y, x\alpha, z] &= (\gamma(x, y\alpha) + \gamma(y, x\alpha)) \cdot z \\ &\qquad + z\left(\sigma(x, y\alpha) + \sigma(y, x\alpha) - \sigma(x\alpha, y) - \sigma(y\alpha, x)\right). \end{aligned}$$

Vergleichen wir die zwei eben berechneten Ausdrücke, so sehen wir die Gültigkeit der Gleichung $\gamma(x, y\alpha) + \gamma(y, x\alpha) = 0$. Dies lässt sich umschreiben in

$$\gamma(x, y\alpha) = \gamma(x\alpha, y).$$

Insbesondere gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$ die Gleichung

$$\gamma(x\alpha\beta, y) = \gamma(x, y\alpha\beta) = \gamma(x\beta, y\alpha) = \gamma(x\beta\alpha, y),$$

woraus wir $\gamma = 0$ folgern und damit durch Einsetzen in Gleichung (1) die Aussage

$$[x, y, z] = z(\sigma(x, y) - \sigma(y, x))$$

erhalten.

Eine Gleichung zur Berechnung von $[x, z, y]$ ist nun leicht zu finden. Die Jacobi-Identität ist gleichwertig mit

$$[y, z, x] = [x, z, y] + [y, x, z].$$

Zusammen mit der Trilinearität ermitteln wir

$$\begin{aligned} [x+y, z, x+y] &= [x, z, x] + [y, z, y] + [x, z, y] + [y, z, x] \\ &= [x, z, x] + [y, z, y] + 2[x, z, y] + [y, x, z] \end{aligned}$$

und wir erhalten für $z \in \mathrm{Split}(T), x, y \in H$

$$\begin{aligned} 2[x, z, y] &= [x+y, z, x+y] - [x, z, x] - [y, z, y] - [y, x, z] \\ &= z\sigma(x+y, x+y) - z\sigma(x, x) - z\sigma(y, y) - [y, x, z] \\ &= z\left(\sigma(x, y) + \sigma(y, x)\right) - [y, x, z] \\ &= z\left(\sigma(x, y) + \sigma(y, x)\right) - z(\sigma(y, x) - \sigma(x, y)) \\ &= 2z\left(\sigma(x, y)\right). \end{aligned}$$

Bisher haben wir gezeigt, dass wir für $x, y \in H$ und $z \in \mathrm{Split}(T)$ die Produkte $[x, y, z]$ und $[x, z, y]$ auch mit der Sesquilinearform berechnen können. Dies bedeutet, dass wir die Produkte von je drei linear unabhängigen Vektoren auf diese Weise berechnen können. Folglich ist die Multiplikation durch die Sesquilinearform gegeben. $\square$

Dem Beweis entnehmen wir, dass die Struktur der Lie-Tripel-Geometrie eindeutig durch die einfache Ebene festgelegt ist.

4.20 Satz

Geometrisch zerfallende Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$ vom Rang 3 mit einem Zerfällungsideal vom Rang 2 sind klassisch oder vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$.

Beweis. Wir bezeichnen die Lie-Tripel-Geometrie mit T und das Zerfällungsideal mit I. Ist eine Unterebene vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$, so sind nach Satz 3.90 alle nicht-abelschen Ebenen von solchem Typ. Mit Satz 4.11 erhalten wir, dass die Lie-Tripel-Geometrie T vom Typ $(R+)$ oder $(R-)$ ist.

Wir können also annehmen, dass keine Unterebene vom Typ $(R+)$ oder $(R-)$ ist, also jede Unterebene klassisch ist. Wir wählen eine Ebene $E \leq T$ ungleich dem Zerfällungsideal. Die Struktur der Ebene E wird demnach von einer Sesquilinearform σ_E induziert. Ist x oder y ein Element von $\mathrm{Split}(T) \cap E$, so gilt $\sigma_E(x, y) = 0$.

Wie im Satz 4.19 definieren wir deshalb eine Sesquilinearform σ durch sesquilineare Fortsetzung von

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} \sigma_E(x, y) & \text{falls } x, y \in E \\ 0 & \text{falls } x \in \mathrm{Split}(T) \text{ oder } y \in \mathrm{Split}(T) \end{cases}$$

und müssen nur zeigen, dass σ das richtige Lie-Tripel-Produkt auf der gesamten Lie-Tripel-Geometrie T induziert.

Wir zeigen, dass die Struktur von T eindeutig durch eine beliebige nicht-abelsche Gerade festgelegt wird. Mit obiger Definition von σ ist dann klar, dass T klassisch ist.

Wir wählen drei Geraden A, B, C derart, dass $A \oplus B = E$ und $B \oplus C = I$ gilt. Folglich gilt $T = A \oplus B \oplus C$. Berechnen wir nun ein Lie-Tripel-Produkt, so erkennen wir wegen der Additivität, dass nur Lie-Tripel-Produkte in den Ebenen $A \oplus B$ und $A \oplus C$ berechnet werden müssen. Hier ist die Multiplikation allerdings nach Satz 3.77 eindeutig durch die Multiplikation auf A gegeben. Demnach ist die Struktur von ganz T eindeutig durch diejenige von A bestimmt. □

4.3 Einfache Lie-Tripel-Geometrien

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir bereits geometrisch zerfallende Lie-Tripel-Geometrien und Lie-Tripel-Geometrien vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ untersucht. Es verbleiben nur noch die einfachen Lie-Tripel-Geometrien. Mit den ersten Sätzen grenzen wir die Möglichkeiten der Lie-Tripel-Systeme bzw. ihrer Standardeinbettungen stark ein. Aus einer endlichen Liste arbeiten wir dann diejenigen heraus, die Standardeinbettungen von integrierbaren Lie-Tripel-Geometrien sind.

Auch hier nutzen wir wieder die bereits bekannte Klassifikation und untersuchen deshalb zunächst nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ und Rang 3. Im nächsten Abschnitt werden wir Lie-Tripel-Geometrien höheren Ranges betrachten.

4.21 Satz
Einfache Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$ vom Rang 3 haben einfache Standardeinbettungen.

Beweis. Die reelle Dimension des Lie-Tripel-Systems ist 12. Es gibt keine einfachen Lie-Algebren dieser Dimension. Der Rest folgt mit Satz 3.24. □

4.22 Satz
Es sei d die Dimension der Standardeinbettung einer einfachen Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ vom Rang 3. Dann gilt $18 \leq d \leq 51$.

Beweis. Die Lie-Tripel-Geometrie ist nicht abelsch. Nach dem Beweis von Satz 3.89 gibt es eine nicht-abelsche Unterebene. Die Dimension der Standardeinbettung dieser Ebene der Lie-Tripel-Geometrie ist laut Tabelle auf Seite 23 mindestens 14. Folglich ist die Dimension der Standardeinbettung des Lie-Tripel-Systems mindestens 14+4=18.

Wir untersuchen die zwei Summanden der Standardeinbettung. Die Lie-Tripel-Geometrie heiße T. $[T,T]$ besteht nach Satz 3.48 aus Abbildungen der Form $x \mapsto Mx + xm$ mit einer (3×3)-$\mathbb{H}$-Matrix M und $m \in \mathrm{Pu}\mathbb{H}$. Folglich ist $[T,T]$ maximal 39-dimensional. T hat Dimension 12. Demnach gilt $\dim(T + [T,T]) \leq 12 + 39 = 51$. □

Die als Standardeinbettung in Frage kommenden Lie-Algebren haben wir nun bereits auf eine überschaubare Anzahl begrenzt.

Wir beginnen nun mit einer genaueren Untersuchung der verbleibenden Fälle. Zunächst schließen wir einige Darstellungen aus, die zwei invariante Unterräume haben.

4.23 Satz
Es sei T eine integrierbare Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ vom Rang 3. Die nach Satz 3.49 existierende natürliche Darstellung der Bewegungsgruppe eines zugehörigen symmetrischen stabilen Raumes auf $\mathbb{H}^4$ hat nicht die irreduziblen Unterräume $\mathbb{H}^3$ und $\mathbb{H}$.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Mit $\mathbb{H}^3$ und $\mathbb{H}$ bezeichnen wir die irreduziblen Unterräume der Darstellung.

Ein zu T gehörender zusammenhängender symmetrischer stabiler Raum heiße M. Wir wählen $o \in M$ und bezeichnen mit s_o die Spiegelung an o. Die Bewegungsgruppe heiße Σ. Diese wird von den Produkten von je zwei Spiegelungen erzeugt. Demnach normalisiert s_o die Gruppe Σ. Dies bedeutet, dass die Menge der irreduziblen Unterräume von Σ durch s_o permutiert wird. Die Dimension von $s_o(\mathbb{H}^3)$ muss wieder 3 sein. Folglich hält s_o die irreduziblen Unterräume fest. Dies bedeutet, dass s_o sogar im Zentralisator von Σ ist. Mit der Gleichung $s_x s_o = s_o(s_o s_x)s_o = s_o s_x$ erhalten wir damit, dass s_o im Zentrum von Σ liegt. Damit ergibt sich $s_o = s_x s_o s_x = s_{s_x(o)}$ für alle x. Insbesondere für x nahe o ist dies ein Widerspruch dazu, dass x ein isolierter Fixpunkt von s_x ist. $\square$

Mit den vorliegenden Resultaten sind wir in der Lage, eine erste Liste von Lie-Algebren, die (noch) als Standardeinbettungen in Frage kommen, anzugeben. Mit den nächsten Sätzen werden wir einige der hier genannten Lie-Algebren noch ausschließen und andere genauer untersuchen. In Satz 4.35 werden wir eine kürzere Liste angeben.

4.24 Satz
Es sei T eine einfache, integrierbare Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ vom Rang 3. Dann ist die Standardeinbettung von T isomorph zu einer der folgenden Lie-Algebren:

$$\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}, \mathfrak{so}_7(\mathbb{R},1), \mathfrak{so}_7(\mathbb{R},2), \mathfrak{u}_3\mathbb{H}, \mathfrak{u}_3(\mathbb{H},1), \mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}, \mathfrak{sl}_4\mathbb{C}, \mathfrak{sl}_3\mathbb{H}, \mathfrak{u}_4\mathbb{H}, \mathfrak{u}_4(\mathbb{H},1), \mathfrak{u}_4(\mathbb{H},2).$$

Beweis. Die Bewegungsgruppe eines zugehörigen symmetrischen stabilen Raumes hat nach Satz 3.49 eine Darstellung auf $\mathbb{H}^4$. Die Standardeinbettung des Lie-Tripel-Systems, die nach Satz 3.19 isomorph zur Lie-Algebra der Bewegungsgruppe ist, ist nach Satz 4.21 einfach und hat nach Satz 4.22 Dimension zwischen 18 und 51. Nach [9, II.4.14] ist jede Darstellung der nach Satz 4.21 einfachen Standardeinbettung vollständig reduzibel. Ist die Darstellung $\mathbb{K}$-linear, so sind die irreduziblen Unterräume nach Satz 1.4 maximal von $\mathbb{K}$-Dimension 16/4, also 4. In [24, 95.10] sind die irreduziblen Darstellungen einfacher Gruppen aufgezählt. Durch Vergleich mit den bereits erarbeiteten Eigenschaften erhalten wir, dass als Standardeinbettungen nur die im Satz genannten Lie-Algebren in Frage kommen. $\square$

Durch die nächsten Sätze wollen wir einige der eben genannten Lie-Algebren ausschließen.

4.25 Satz
Die Standardeinbettung einer 12-dimensionalen Lie-Tripel-Geometrie ist weder $\mathfrak{so}_7(\mathbb{R},1)$ noch $\mathfrak{so}_7(\mathbb{R},2)$.

Beweis. Angenommen, die Lie-Tripel-Geometrie T hat Standardeinbettung $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_7(\mathbb{R},r)$ mit $r \in \{1,2\}$.

Die Standardinvolution von $\mathfrak{g}$ werde mit ι bezeichnet. Laut [22, Seite 441] ist jeder Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ein innerer Automorphismus, also nach Satz 3.20 auch ι. Folglich ist ι die adjungierte Darstellung eines Elementes $A \in \mathrm{SO}_7(\mathbb{R},r)$. Da ι eine Involution ist, liegt A^2 im Zentrum von $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R},r)$. Wir entnehmen [24, 94.33], dass das Zentrum der Gruppe $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R},r)$ trivial ist. Demnach gilt $A^2 = E$ und ι ist bis auf Basiswechsel die adjungierte Darstellung einer Diagonalmatrix mit Einträgen ± 1.

Das Lie-Tripel-System T finden wir als Eigenraum der Konjugation mit A zum Eigenwert -1. Es muss 12-dimensional sein. Wir erhalten bis auf Konjugation mit gewissen Permutationsmatrizen:

- Für $r = 1$ die Involutionen $\iota_q = \mathrm{Ad}\,\mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1,1,1,1)$ und $\iota_h = \mathrm{Ad}\,\mathrm{diag}(1,1,1,-1,-1,-1,-1)$ und
- für $r = 2$ neben diesen beiden Involutionen auch die Involution $\iota_z = \mathrm{Ad}\,\mathrm{diag}(1,1,-1,-1,-1,-1,1)$.

Die Untersuchungen verlaufen für alle drei Fälle analog. Für $\iota = \iota_q$ und $\iota = \iota_h$ können wir die Überlegungen gemeinsam niederschreiben. Der Fall $\iota = \iota_z$ wird im Anschluss behandelt.

Für $\iota = \iota_h$ oder $\iota = \iota_q$ besteht T aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma(A) \\ A & 0 \end{pmatrix}, \qquad A \in \begin{cases} \mathbb{R}^{3\times 4} & \text{falls } \iota = \iota_q, \\ \mathbb{R}^{4\times 3} & \text{falls } \iota = \iota_h. \end{cases}$$

Die Abbildung σ ist so zu wählen, dass die eben beschriebenen Matrizen in der Lie-Algebra $\mathfrak{so}_7(\mathbb{R}, r)$ liegen. Damit erhalten wir für ι_q

$$\sigma(A) = A^{tr} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \varepsilon & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon \in \begin{cases} -1 & \text{falls } r = 1, \\ +1 & \text{falls } r = 2 \end{cases}$$

und für ι_h

$$\sigma(A) = A^{tr} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \varepsilon & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon \in \begin{cases} -1 & \text{falls } r = 1, \\ +1 & \text{falls } r = 2 \end{cases}$$

Wir wollen zeigen, dass in der Lie-Algebra $\mathrm{ad}[T,T]$ bestimmte Elemente vorkommen. Dazu berechnen wir in der Standardeinbettung

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma(A) \\ A & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma(B) \\ B & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \sigma(A)B - \sigma(B)A & 0 \\ 0 & A\sigma(B) - B\sigma(A) \end{pmatrix}$$

und erhalten durch Einsetzen von Matrizen A und B, die jeweils eine Eins und elf Nullen enthalten, eine Beschreibung

$$\mathrm{ad}[T,T] = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{so}_4, B \in \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}, r) \right\} & \text{falls } \iota = \iota_q, \\[2ex] \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{so}_3, B \in \mathfrak{so}_4(\mathbb{R}, r) \right\} & \text{falls } \iota = \iota_h. \end{cases}$$

Wir erhalten Ad $\mathrm{diag}(-1,-1,1,1,1,1,1) \in \exp \mathrm{ad}[T,T]$. Nach Satz 3.13 bildet der Eigenraum zum Eigenwert -1, also die Menge der Elemente von T, bei denen nur die ersten beiden Zeilen und Spalten von

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma(A) \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

genutzt werden, eine Lie-Tripel-Geometrie S mit $\dim_{\mathbb{R}} S = 6$.

Wir berechnen die Standardeinbettung von S, indem wir wie oben die Produkte der Basiselemente ausrechnen und erhalten

$$S + [S,S] = \begin{cases} \mathfrak{so}_5(\mathbb{R},1) & \text{falls } \iota = \iota_q, r = 1, \\ \mathfrak{so}_5(\mathbb{R},2) & \text{falls } \iota = \iota_q, r = 2, \\ \mathfrak{so}_6(\mathbb{R},1) & \text{falls } \iota = \iota_h, r = 1, \\ \mathfrak{so}_6(\mathbb{R},2) & \text{falls } \iota = \iota_h, r = 2. \end{cases}$$

Die Standardeinbettung von S ist also einfach. Folglich muss S wegen Satz 3.23 ein einfaches Lie-Tripel-System sein. Einfache Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{R}$ vom Rang 6 haben Bewegungsgruppe $\mathrm{SO}_7(\mathbb{R},k)$. Demnach ist S keine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{R}$. Einfache Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{C}$ vom Rang 3 haben Bewegungsgruppe $\mathrm{SU}_4(\mathbb{C},k)$. Demnach kommt nur $\mathfrak{so}_6(\mathbb{R},2) \cong \mathfrak{su}_4(\mathbb{C},2)$ in Frage.

Wir untersuchen den Fall $r = 2, \iota = \iota_h$ weiter. Wie oben erhalten wir in diesem Falle Ad $\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,-1) \in \exp \mathrm{ad}[T,T]$. Nach Satz 3.13 bildet die Menge der Elemente von T, bei denen nur die letzen beiden Zeilen von Spalten genutzt werden, eine Lie-Tripel-Geometrie S mit $\dim_{\mathbb{R}} S = 6$. Die Standardeinbettung von S ist $S + [S,S] = \mathfrak{so}_5(\mathbb{R},2)$. Wie oben sehen wir ein, dass dies zu einem Widerspruch führt.

Wir kommen nun zum Fall $\iota = \iota_z$. Analog zu den obigen Überlegungen erhalten wir $\mathrm{diag}(-1,-1,1,1,1,1,1) \in \exp \mathrm{ad}[T,T]$ und somit ein Lie-Tripel-Untersystem, das aus Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma(A) & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besteht, wobei $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und $\sigma(A) = A^{tr}\mathrm{diag}(-1,-1,-1,1)$ gilt. (Die Nullen auf der Diagonale der zentriert gedruckten Matrix sind quadratische Matrizen der Größe $2 \times 2, 4 \times 4$ bzw. 1×1.) Die Standardeinbettung dieses Lie-Tripel-Untersystems ist isomorph zu $\mathfrak{so}_6(\mathbb{R},1)$. Eine Lie-Tripel-Geometrie mit reeller Dimension 8 kann aber keine solche Standardeinbettung haben: Reelle und komplexe Lie-Tripel-Geometrien haben laut Satz 3.81 Standardeinbettung $\mathfrak{so}_9(\mathbb{R},k)$ bzw. $\mathfrak{su}_5(\mathbb{C},k)$, quaterniale haben laut Tabelle auf Seite 23 ebenfalls andere Standardeinbettungen. $\square$

Die Argumente und Ideen des letzten Beweises wiederholen wir in den nächsten beiden Sätzen um ähnliche Aussagen zu erhalten.

4.26 Satz
Keine 12-dimensionale Lie-Tripel-Geometrie hat Standardeinbettung $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$.

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ ist Standardeinbettung einer Lie-Tripel-Geometrie. Wir berechnen den Eigenraum zum Eigenwert -1 der Standardinvolution. Dieser ist das Lie-Tripel-System, also 12-dimensional.

Laut [22, Seite 442] hat $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ nur innere Automorphismen. Das Zentrum von $\mathrm{Sp}_4\mathbb{C}$ besteht aus ± 1. Demnach sind involutorische Automorphismen von $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ genau die Abbildungen $X \mapsto AXA^{-1}$ mit $A \in \mathrm{Sp}_4\mathbb{C}$ mit $A^2 = \pm 1$. Wir nutzen die Schreibweise $E_{k,l} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{k-\mathrm{mal}},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{l-\mathrm{mal}})$ und entnehmen $(12)(34) \leq \mathrm{Sp}_4\mathbb{C}$ und [7, Kap. I, §5, Satz 9] die Information, dass wir somit ohne Einschränkung $A = \begin{pmatrix} E_{k,2-k} & \\ & E_{k,2-k} \end{pmatrix}$ oder $A = i \begin{pmatrix} E_{k,2-k} & \\ & E_{k,2-k} \end{pmatrix}$ annehmen können. Für $k = 0$ und $k = 2$ ist die Konjugation $X \mapsto AXA^{-1}$ identisch id oder $-$id. Der Eigenraum zum Eigenwert -1 hat in diesen Fällen nicht Dimension 12. Wir müssen demnach nur noch den Fall $k = 1$ untersuchen.

Die Matrix $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X_1^{tr} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ mit $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{C}^{2\times 2}, X_2^{tr} = X_2, X_3^{tr} = X_3$ wird durch $X \mapsto E_{1,1}AE_{1,1}$ auf $X = \begin{pmatrix} E_{1,1}X_1E_{1,1} & E_{1,1}X_2E_{1,1} \\ E_{1,1}X_3E_{1,1} & -E_{1,1}X_1^{tr}E_{1,1} \end{pmatrix}$ abgebildet. Der Eigenraum zum Eigenwert -1 hat bei den Matrizen X_i die reelle Dimension 4 (für $i = 1$) bzw. 2 (für $i = 2, 3$). Demnach ist der Eigenraum nur 8-dimensional.

Diese Überlegungen zeigen mit der Kommutativität von $\mathbb{C}$ außerdem, dass die Konjugation mit der mit i multiplizierten Matrix ebenfalls keinen Eigenraum zum Eigenwert -1 der Dimension 12 hat. □

4.27 Satz
Keine 12-dimensionale Lie-Tripel-Geometrie hat Standardeinbettung $\mathfrak{sl}_4\mathbb{C}$.

Beweis. Wie bereits im Beweis von Satz 4.26 verweisen wir zunächst auf [22, Seite 441] für Informationen über die Automorphismengruppe von $\mathfrak{sl}_4\mathbb{C}$ und erhalten hier, dass die Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{sl}_4\mathbb{C}$ in der Automorphismengruppe Index 2 hat.

Bei den inneren Automorphismen genügt es wegen der Kommutativität von $\mathbb{C}$, wenn wir die Konjugation mit $E_{k,4-k}$ betrachten. Diese hat auf $\mathfrak{sl}_4\mathbb{C}$ einen Eigenraum zum Eigenwert -1 der Dimension $2k(4-k)$. Dieser Wert ist immer ungleich der von uns gesuchten Dimension 12.

Ein weiterer Automorphismus ist $X \mapsto \overline{X}$. Indem wir für $A \in \mathrm{SL}_4\mathbb{C}$ die Produkte AX und $\overline{X}A$ für Matrixen X, die aus 15 Nullen und genau einer Eins außerhalb der Diagonalen bestehen, berechnen, erkennen wir, dass $X \mapsto \overline{X}$ ein äußerer Automorphismus von $\mathfrak{sl}_4\mathbb{C}$ ist. Demnach haben alle äußeren Automorphismen von $\mathfrak{sl}_4\mathbb{C}$ die Form $\varphi_B : X \mapsto B^{-1}\overline{X}B$ mit einer Matrix $B \in \mathrm{SL}_4\mathbb{C}$. Unabhängig von B erhalten wir aus $\varphi_B(X) = \pm X$ die Information $\varphi_B(Xi) = \mp Xi$. Hieraus folgt, dass die Eigenräume von φ_B zu den Eigenwerten $+1$ und -1 gleiche Dimension haben. Ist φ_B eine Involution, so sind die Eigenräume demnach 15-dimensional.

□

4.3.1 Standardeinbettung $\mathfrak{u}_4(\mathbb{H}, r), r = 0, 1, 2$

Wir wollen zeigen, dass die zu den Standardeinbettungen $\mathfrak{u}_4(\mathbb{H})$ und $\mathfrak{u}_4(\mathbb{H}, 2)$ führenden Lie-Tripel-Geometrien eindeutig sind und dass zur Standardeinbettung $\mathfrak{u}_4(\mathbb{H}, 1)$ maximal zwei Lie-Tripel-Geometrien führen. Als Voraussetzung nutzen wir, dass die Lie-Tripel-Geometrien zwölfdimensional sein sollen.

Auch hier betrachten wir wieder involutorische Automorphismen. Die inneren Automorphismen der Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_4(\mathbb{H}, r) = \left\{ X \in \mathbb{H}^{4\times 4} \,:\, \overline{X}^{tr} = -E_{4-r,r} X E_{4-r,r} \right\}$$

lassen sich als Konjugationen mit Elementen der Lie-Gruppe

$$G = \mathrm{U}_4\mathbb{H} = \left\{ A \in \mathrm{GL}_4\mathbb{H} \,:\, \overline{A}^{tr} E_{4-r,r} A = E_{4-r,r} \right\}$$

schreiben.

Ist die Konjugation mit $A \in G$ eine Involution, so ist A^2 ein Element des Zentrums von G. Laut [24, 94.33] gilt somit $A^2 = \pm 1$.

Zunächst betrachen wir den Fall $A^2 = -1$. Durch einen Basiswechsel (vgl. [7, Kap. I, §5, Satz 9]) können wir $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_4)$ mit $a_j^2 = -1$ annehmen. Aus $A \in \mathrm{U}_4(\mathbb{H}, r)$ folgern wir $||a_j||^2 = 1$. Die Involution $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, X \mapsto A^{-1}XA = -AXA$ induziert in den Einträgen von X die Involution $x_{st} \mapsto -a_s x_{st} a_t$. Für Indices $s \neq t$ erhalten wir aus Satz 1.5 eine Zerlegung in zweidimensionale Eigenräume zu den Eigenwerten ± 1. Diagonalelemente von $\mathfrak{u}_4(\mathbb{H}, r)$ sind reine Quaternionen. Die Involution zerlegt den dreidimensionalen Raum der reinen Quaternionen nach Satz 1.5 in einen eindimensionalen und einen zweidimensionalen Eigenraum. Folglich sind die Eigenräume zu den Eigenwerten $+1$ und -1 jeweils mindestens 16-dimensional und wir erhalten durch $A^2 = -1$ keine Involution, die zu einem 12-dimensionalen Lie-Tripel-System führt.

Im Falle $A^2 = 1$ erhalten wir bis auf Basiswechsel, dass A eine Diagonalmatrix mit Einträgen ± 1 ist. Wegen $\mathrm{Perm}(4-r) \times \mathrm{Perm}(r) \leq \mathrm{U}_4(\mathbb{H}, r)$ können wir die Einträge sortieren und

$$A = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{a\text{-mal}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{b\text{-mal}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{c\text{-mal}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{d\text{-mal}})$$

mit $a + b = 4 - r, c + d = r$ annehmen. Die Involution $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, X \mapsto A^{-1}XA$ hat einen Eigenraum zum Eigenwert -1 der Dimension $4(a+c)(b+d)$. Dieser Wert soll 12 sein, folglich gilt $a + c \in \{1, 3\}$.

Im Folgenden betrachten wir die möglichen Werte für r.

- $r = 0$: Wir erhalten

  $$\begin{aligned} A_1 &= \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \quad \text{oder} \\ A_2 &= \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1). \end{aligned}$$

  Die Matrizen A_1 und $-A_2$ sind durch die Transposition $(14) \in \mathrm{U}_4\mathbb{H}$ konjugiert, folglich sind die sich ergebenden Lie-Tripel-Systeme isomorph.

- $r = 1$: Wir erhalten

  $$\begin{aligned} A_1 &= \mathrm{diag}(-1, -1, -1, 1) \quad \text{oder} \\ A_2 &= \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1) \quad \text{oder} \\ A_3 &= \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \quad \text{oder} \\ A_4 &= \mathrm{diag}(1, 1, -1, 1). \end{aligned}$$

  Es gilt $A_1 = -A_2$. Die Matrizen A_3 und $-A_4$ sind durch die Transposition $(13) \in \mathrm{U}_4(\mathbb{H}, 1)$ konjugiert. Wir erhalten demnach maximal zwei Isomorphietypen von Lie-Tripel-Systeme.

- $r = 2$: Wir erhalten

  $$\begin{aligned} A_1 &= \mathrm{diag}(-1, -1, 1, -1) \quad \text{oder} \\ A_2 &= \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1) \quad \text{oder} \\ A_3 &= \mathrm{diag}(1, -1, 1, 1) \quad \text{oder} \\ A_4 &= \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1). \end{aligned}$$

  Die Matrizen A_1 und $-A_2$ sind durch die Transposition $(34) \in \mathrm{U}_4(\mathbb{H}, 2)$ konjugiert. Die Matrizen A_3 und $-A_4$ sind durch die Transposition $(12) \in \mathrm{U}_4(\mathbb{H}, 2)$ konjugiert. Die Matrizen A_2 und A_3 sind durch die Permutation $(13)(24) \in \mathrm{U}_4(\mathbb{H}, 2)$ konjugiert. Folglich sind alle sich ergebenden Lie-Tripel-Systeme isomorph.

Für die bisher ermittelten Lie-Tripel-Systeme untersuchen wir noch, auf welche Art eine Geradenstruktur erklärbar ist. Wir beginnen mit Lie-Tripel-Geometrien mit Standardeinbettung $\mathfrak{u}_4\mathbb{H}$.

Nach den bisherigen Überlegungen kommt nur die Konjugation mit $E_{1,3}$ als Standardinvolution in Frage. Berechnen wir $[T,T]$, den Eigenraum zum Eigenwert $+1$, so erhalten wir $\mathfrak{u}_3\mathbb{H} \oplus \mathfrak{u}_1\mathbb{H}$ und somit $\exp\operatorname{ad}[T,T] = \mathrm{U}_3\mathbb{H} \times \mathrm{U}_1\mathbb{H}$. Identifizieren wir die Elemente des Lie-Tripel-Systems mit den Einträgen in der ersten Spalte der Elemente von $\mathfrak{u}_4\mathbb{H}$, so erhalten wir eine Wirkung von $\exp\operatorname{ad}[T,T]$ in der Form $(x,y,z)^{tr} \mapsto A(x,y,z)^{tr}\alpha^{-1}$. Durch die Untergruppe $0 \times \mathrm{U}_1\mathbb{H}$ werden uns die $\mathbb{H}$-Räume der Lie-Tripel-Geometrie aufgezeigt. Die quaterniale Struktur ist demnach die gewöhnliche Rechtsmultiplikation.

Entsprechend verfahren wir für $\mathfrak{u}_4(\mathbb{H},1)$ mit der Involution $\operatorname{Ad}\operatorname{diag}(1,1,1,-1)$ und erhalten das gleiche Resultat.

Bei der Untersuchung der Standardeinbettung $\mathfrak{u}_4(\mathbb{H},1)$ mit der Standardinvolution $\operatorname{Ad}\operatorname{diag}(1,-1,-1,-1)$ ermitteln wir $\exp\operatorname{ad}[T,T] = \mathrm{U}_3(\mathbb{H},1) \times \mathrm{U}_1\mathbb{H}$. Die Wirkung stimmt mit der oben angegebenen überein, weswegen wir die gleiche Information über die Geradenstruktur erhalten.

Auch bei $\mathfrak{u}_4(\mathbb{H},2)$ mit der Involution $\operatorname{Ad}\operatorname{diag}(1,-1,-1,-1)$ erhalten wir wieder $\exp\operatorname{ad}[T,T] = \mathrm{U}_3(\mathbb{H},1) \times \mathrm{U}_1\mathbb{H}$, woraus wir ableiten, dass die Geraden wieder die eindimensionalen $\mathbb{H}$-Unterräume sind.

Die Überlegungen dieses Abschnittes ergeben:

4.28 Satz
Bis auf Isomorphie gibt es genau eine Lie-Tripel-Geometrie der Dimension 12, dessen Standardeinbettung $\mathfrak{u}_4\mathbb{H}$ ist.
Bis auf Isomorphie gibt es maximal zwei Lie-Tripel-Geometrien der Dimension 12, deren Standardeinbettung $\mathfrak{u}_4(\mathbb{H},1)$ ist.
Bis auf Isomorphie gibt es genau eine Lie-Tripel-Geometrie der Dimension 12, dessen Standardeinbettung $\mathfrak{u}_4(\mathbb{H},2)$ ist.

4.3.2 Standardeinbettung $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$

Wir wollen zeigen, dass es im Wesentlichen nur eine 12-dimensionale Lie-Tripel-Geometrie gibt, deren Standardeinbettung $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ ist. Dazu betrachten wir wieder involutorische Automorphismen.

Jeder innere Automorphismus der Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H} = \left\{ X \in \mathbb{H}^{4\times 4} \ : \ \overline{X}^{tr} = iXi \right\}$$

lässt sich als Konjugation mit einem Element der Lie-Gruppe

$$G = \mathrm{U}_4^\alpha\mathbb{H} = \left\{ A \in \mathrm{GL}_4\mathbb{H} \,:\, \overline{A}^{tr} iA = iE_4 \right\}$$

schreiben.

Wir beginnen mit der Betrachtung äußerer Automorpismen von $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$.

4.29 Satz
Äußere Automorphismen von $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ haben die Form $\varphi\circ\mathrm{Ad}(A)$ mit einem $A \in \mathrm{U}_4^\alpha\mathbb{H}$ und $\varphi : \mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H} \to \mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}, X \mapsto j^{-1}Xj$.

Beweis. Man rechnet direkt nach, dass φ ein Automorphismus von $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ ist.

Wäre φ ein innerer Automorphismus, so gäbe es ein $A \in \mathrm{U}_4^\alpha\mathbb{H}$ derart, dass für alle $X \in \mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ die Gleichung $AXA^{-1} = j^{-1}Xj$ erfüllt wäre. Diese Gleichung ist äquivalent zu $XjA = jAX$. Durch Einsetzen von $X = \mathrm{diag}(i, 0, 0, 0)$ erhalten wir $a_{11} \in \mathbb{C}j, a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$. Durch analoge Rechnungen erhalten wir, dass A eine Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\mathbb{C}j$ ist. Dies ist nicht verträglich mit der Bedingung $\overline{A}^{tr} iA = iE_4$. Folglich ist φ ein äußerer Automorphismus.

Laut [22, Seite 442] hat der Normalteiler der inneren Automorphismen von $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H} = \mathfrak{so}_8(\mathbb{R}, 2)$ in der Automorphismengruppe Index 2, woraus wir obige Darstellung der Automorphismen erhalten. □

In den folgenden drei Sätzen werden die äußeren Automorphismen zunächst in Konjugiertenklassen eingeteilt und dann untersucht, welche dieser Automorphismen als Standardinvolutionen von Lie-Tripel-Geometrien in Frage kommen.

4.30 Satz
Ist σ ein äußerer involutorischer Automorphismus der Lie-Algebra $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$, so ist σ konjugiert zu φ oder $\varphi \circ \mathrm{Ad}(F_4)$ mit $F_4 = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ -1 & & & \\ & -1 & & \end{pmatrix}$.

Beweis. Nach Voraussetzung und Satz 4.29 gibt es ein $A \in \mathrm{U}_4^\alpha\mathbb{H}$ mit $\sigma = \varphi \circ \mathrm{Ad}(A)$. Wegen der Involutionseigenschaft von σ gilt $\mathrm{id} = \sigma \circ \sigma = \mathrm{Ad}(jAjA)$. Das Zentrum von $\mathbb{U}_4^\alpha\mathbb{H}$ besteht laut [24, 94.33] aus $\pm E_4$. Wir folgern $jAjA = \pm E_4$.

Nach [11, 6.16] existiert eine Cartan-Involution, die mit σ vertauscht. Je zwei Cartan-Involutionen sind gemäß [11, 6.19] durch einen inneren Automorphismus konjugiert. Nach [24, 94.33] ist $\mathfrak{u}_4\mathbb{C}$ eine maximal kompakte Unteralgebra von $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$. Folglich ist $\mathrm{Ad}(iE_4)$ eine Cartan-Involution und wir können annehmen, dass

σ und $\mathrm{Ad}(iE_4)$ kommutieren. Demnach gilt $\mathrm{id} = \mathrm{Ad}(iE) \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}(iE)^{-1} \circ \sigma^{-1} = \mathrm{Ad}(iE \cdot jA \cdot (iE)^{-1} \cdot (jA)^{-1}) = \mathrm{Ad}(ijAijA)$. Wieder nutzen wir das Zentrum von $\mathbb{U}_4^\alpha\mathbb{H}$ und erhalten $ijAijA = \pm E_4$.

Die Gleichung $ijAijA = \pm E_4$ formen wir zu $jAj = \mp i^{-1}A^{-1}i^{-1}$ um. Aus der Bedingung $A \in \mathrm{U}_4^\alpha\mathbb{H}$ erhalten wir $iA^{-1}i^{-1} = \overline{A}^{tr}$. Zusammen ergibt dies $jAj = \pm\overline{A}^{tr}$. Setzen wir dies in $jAjA = \pm E_4$ ein, so erkennen wir $\overline{A}^{tr}A = \pm E_4$. Die Matrix $\overline{A}^{tr}A$ ist positiv definit. Demnach gilt $\overline{A}^{tr}A = E_4$ und folglich $A \in \mathrm{U}_4\mathbb{C}$.

Nun erhalten wir $\overline{A}^{tr}A = E_4 = \pm jAjA = \pm\overline{A}A$ und somit $A = \pm A^{tr}$.

Im Fall $A = A^{tr}$ erhalten wir $\overline{A}A = E_4$. Wir zeigen, dass A durch einen Basiswechsel $T \in \mathrm{SO}_4\mathbb{R} \in \mathrm{U}_4^\alpha\mathbb{H}$ diagonalisierbar ist. Die Existenz eines diagonalisierenden Basiswechsels aus $\mathrm{SU}_4\mathbb{C}$ ist wegen $\overline{A}^{tr}A = E_4$ klar. Sei $x \in \mathbb{C}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Es gilt $||\lambda||^2 = 1$ und $x = \overline{A}Ax = \overline{A}x\lambda$. Daraus erhalten wir $\overline{A}x = x\lambda^{-1}$ und durch Konjugation $A\overline{x} = \overline{x}\lambda$. Die Eigenvektoren für eine Basiswechselmatrix können also aus $\mathbb{R}^4$ gewählt werden. Damit ist gezeigt, dass der Basiswechsel ein Element der $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ ist und demnach mit φ vertauscht. Folglich können wir annehmen, dass A eine Diagonalmatrix ist.
Sei $B \in \mathrm{U}_4\mathbb{C}$ diagonal mit $B^2 = A$. Es gilt $\mathrm{Ad}(B) \circ \varphi = \varphi \circ \mathrm{Ad}(\overline{B}) = \varphi \circ \mathrm{Ad}(B^{-1})$. Daraus erhalten wir $\mathrm{Ad}(B) \circ \varphi \circ \mathrm{Ad}(A) \circ \mathrm{Ad}(B)^{-1} = \varphi \circ \mathrm{Ad}(B^{-1}AB^{-1}) = \varphi$.

Wir betrachten den Fall $A = -A^{tr}$. Da $A \in \mathrm{U}_4\mathbb{C} \leq \mathrm{U}_4^\alpha\mathbb{H}$ schiefsymmetrisch ist, existiert ein $T \in \mathrm{U}_4\mathbb{C}$ mit $T^{tr}AT = F_4$. Es gilt $\mathrm{Ad}(T) \circ \varphi = \varphi \circ \mathrm{Ad}(\overline{T})$. Wir erhalten $\mathrm{Ad}(T)^{-1} \circ \varphi \circ \mathrm{Ad}(A) \circ \mathrm{Ad}(T) = \varphi \circ \mathrm{Ad}(\overline{T^{-1}}AT) = \varphi \circ \mathrm{Ad}(F_4)$. □

4.31 Satz
Die Involution $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H})$ führt nicht zu einer Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ vom Rang 3.

Beweis. Der Eigenraum zum Eigenwert -1 besteht aus denjenigen Matrizen, die nur Einträge aus $\mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}ij$ enthalten. Dazu gehört der vierdimensionale Raum der Diagonalmatrizen und ein 12-dimensionaler Raum von Nicht-Diagonalmatrizen. Der Eigenraum ist demnach zu groß. □

4.32 Satz
Die Involution $\varphi \circ \mathrm{Ad}(F_4) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H})$ führt nicht zu einer Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ vom Rang 3.

Beweis. Die Lie-Algebra $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ besteht aus Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ i\overline{B}^{tr}i & D \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A, D \in \mathfrak{u}_2^\alpha\mathbb{H}, B \in \mathbb{H}^{2\times 2}.$$

Es gilt

$$\varphi \circ \mathrm{Ad}(F_4)\begin{pmatrix} A & B \\ i\overline{B}^{tr} i & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -jDj & ji\overline{B}^{tr} ij \\ jBj & -jAj \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir den Eigenraum von $\varphi \circ \mathrm{Ad}(F_4)$ zum Eigenwert -1 mit T und den Eigenraum zum Eigenwert 1 mit $[T,T]$, so erhalten wir

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} A & Bj \\ jB & jAj \end{pmatrix} : A, B \in \mathfrak{u}_2^\alpha \mathbb{H} \right\} \quad \text{und}$$

$$[T,T] = \left\{ \begin{pmatrix} A & Bj \\ -jB & -jAj \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{u}_2^\alpha \mathbb{H}, B \in \mathbb{H}^{2\times 2} \text{ mit } \overline{B}^{tr} = -iBi \right\}.$$

Demnach gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & -1 & \\ & 0 & & \\ 1 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in [T,T]$$

und wir folgern

$$\sigma_1 := \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 := \mathrm{Ad}\,\mathrm{diag}(-1,1,-1,1) \in \exp \mathrm{ad}[T,T]$$

sind Automorphismen von T. Wir berechnen die Eigenräume dieser Involutionen.

$$\mathrm{Fix}(\sigma_1) = \left\{ \begin{pmatrix} ai & b & cij & dj \\ -b & ai & -dj & cij \\ -cij & dj & ai & -b \\ -dj & -cij & b & ai \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R}, b, d \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}j \right\}$$

$$\mathrm{Fix}(-\sigma_1) = \left\{ \begin{pmatrix} ai & bi & cij & dij \\ bi & -ai & dij & -cij \\ -cij & -dij & ai & bi \\ -dij & cij & bi & -ai \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{Fix}(\sigma_2) = \left\{ \begin{pmatrix} ai & & cij & \\ & bi & & dij \\ -cij & & ai & \\ & -dij & & bi \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{Fix}(-\sigma_2) = \left\{ \begin{pmatrix} & a & & bj \\ i\overline{a}i & & i\overline{b}ij & \\ & jb & & jaj \\ ji\overline{b}i & & ij\overline{a}ji & \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{H} \right\}$$

Wäre T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$, so wären $\mathrm{Fix}(-\sigma_1)$ und $\mathrm{Fix}(\sigma_2)$ nach Satz 3.41 Geraden von T. Die zwei Geraden müssen identisch sein oder trivial schneiden. Der Schnitt ist jedoch zweidimensional. Folglich ist T keine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$. □

Nun wenden wir uns den inneren Automorphismen zu. Der Einfachheit halber arbeiten wir zunächst mit der zu $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ isomorphen Lie-Algebra $\mathfrak{so}_8(\mathbb{R},2)$.

4.33 Satz
Bis auf Konjugation gibt es maximal einen involutorischen inneren Automorphismus von $\mathfrak{so}_8(\mathbb{R},2)$, dessen Eigenraum zum Eigenwert -1 eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ vom Rang 3 ist.

Beweis. Es sei $\mathrm{Ad}(A)$, $A \in \mathrm{SO}_8(\mathbb{R},2)$ ein involutorischer innerer Automorphismus von $\mathfrak{so}_8(\mathbb{R},2)$. Aus $\mathrm{Ad}(A)^2 = \mathrm{id}$ folgern wir $A^2 = \pm 1$. Demnach ist A in einer maximal kompakten Untergruppe von $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R},2)$ enthalten und wir können wegen [9, III.7.3] und [9, III.5.16] annehmen, dass A ein Element des Standardtorus von $\mathrm{SO}_8(\mathbb{R},2)$ ist. Aus $A^2 = \pm 1$ erhalten wir bis auf Multiplikation mit dem Zentrumselement $-E_8 \in \mathrm{SO}_8(\mathbb{R},2)$ und Umsortieren, dass A ohne Einschränkung eine der folgenden Matrizen ist:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \mathrm{diag}(1,1,1,1,1,1,-1,-1) \\ A_2 &:= \mathrm{diag}(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1) \\ A_3 &:= \mathrm{diag}(1,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 &:= \mathrm{diag}(1,1,1,1,1,-1,-1,1) \\ A_5 &:= \mathrm{diag}(1,1,1,-1,-1,-1,-1,1) \\ A_6 &:= \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1) \end{aligned}$$

$$A_7 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & -1 & & \\ & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden werden wir sechs dieser Matrizen ausschließen. Bei A_2 und A_5 ist dies sehr einfach möglich: Die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert -1 von $\mathrm{Ad}(A_2)$ und $\mathrm{Ad}(A_5)$ ist jeweils 16.

Als nächstes betrachten wir A_1. Bezeichnen wir den Eigenraum zum Eigenwert

-1 mit T und den zum Eigenwert 1 mit $[T,T]$, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in [T,T],$$

woraus wir $\sigma := \operatorname{Ad}\operatorname{diag}(-1,-1,1,1,1,1,1,1) \in \exp\operatorname{ad}[T,T]$ folgern. Der Eigenraum zum Eigenwert -1 von σ besteht aus (8×8)-Matrizen, bei denen oben rechts eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und unten links die Matrix B^{tr} auftritt. Nehmen wir an, dass T eine Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ ist, so erhalten wir mit Satz 3.41, dass auch $S := \operatorname{Fix}(-\sigma)$ eine Lie-Tripel-Geometrie ist. Wegen $\dim S = 4$ ist S eine Gerade. Die Standardeinbettung von S ist $\mathfrak{so}_4(\mathbb{R},2)$. Diese kommt als Standardeinbettung von $\mathbb{H}$-Geraden nicht in Frage.

Bei der Rechnung mit A_4 erhalten wir mit der gleichen Involution σ eine $\mathbb{H}$-Gerade mit Standardeinbettung $\mathfrak{so}_4(\mathbb{R},1)$. Solche Geraden haben andere Standardeinbettungen. Folglich führt A_4 nicht zu einer Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$.

Mit fast identischen Argumenten betrachten wir die Involution $\operatorname{Ad}(A_3)$. Die Eigenräume werden wie oben bezeichnet. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in [T,T],$$

woraus wir $\sigma := \operatorname{Ad}\operatorname{diag}(1,1,1,1,1,1,-1,-1) \in \exp\operatorname{ad}[T,T]$ folgern. Der Eigenraum zum Eigenwert $+1$ von σ besteht aus (8×8)-Matrizen, bei denen oben in der Mitte eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und links in der Mitte die Matrix $-B^{tr}$ auftritt. Wie oben erhalten wir, dass der Eigenraum eine Lie-Tripel-Geometrie S über $\mathbb{H}$ vom Rang 2 ist. Die Standardeinbettung ist $\mathfrak{so}_6\mathbb{R}$. Laut Tabelle auf Seite 23 ist dies nicht möglich.

Zum Ausschluss von A_6 erkennen wir zunächst $\operatorname{Ad}\operatorname{diag}(1,-1,-1,1,1,1,1,1) \in \exp\operatorname{ad}[T,T]$, woraus wir wieder die Existenz einer $\mathbb{H}$-Gerade mit Standardeinbettung $\mathfrak{so}_4(\mathbb{R},1)$ und somit einen Widerspruch folgern.

Die Involution $\operatorname{Ad}(A_7)$ kann zu maximal einem Lie-Tripel-System führen. $\square$

Die weiteren Rechnungen mit $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ führen wir wieder direkt an $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ durch.

4.34 Satz
Die Lie-Algebra $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ ist bis auf Isomorphie Standardeinbettung von genau einer Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ vom Rang 3.

Beweis. In den letzten Sätzen haben wir bereits ausgeschlossen, dass die Standardinvolution ein äußerer Automorphismus von $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ ist.

Die Lie-Algebren $\mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}$ und $\mathfrak{so}_8(\mathbb{R}, 2)$ sind isomorph. Laut dem letzten Satz gibt es bis auf Konjugation maximal einen involutorischen inneren Automorphismus, der zu einer Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ vom Rang 3 führen kann.

Wie wir im Abschnitt über klassische Lie-Tripel-Geometrien erkennen können, ist $\mathrm{Ad}(E_{1,3})$ ein solcher Automorphismus. Wir zeigen noch, dass die Struktur der Geraden eindeutig bestimmt ist.

Das Lie-Tripel-System, das wir als Eigenraum von $\mathrm{Ad}\,\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ zum Eigenwert -1 erhalten, werde mit T bezeichnet. Er besteht aus Matrizen der Form
$$\begin{pmatrix} 0 & \varphi(x) \\ x & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^{4\times4}$$
mit einem $x \in \mathbb{H}^3$ und einer passenden Funktion φ. Wir identifizieren diese Matrix mit $x \in \mathbb{H}^3$. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist $[T, T] = \mathfrak{u}_1^\alpha\mathbb{H} \oplus \mathfrak{u}_3^\alpha\mathbb{H}$. Demnach ist $\sigma := \mathrm{Ad}\,\mathrm{diag}(1, 1, -1, -1) \in \exp\mathrm{ad}[T, T]$ ein Automorphismus von T. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 von σ besteht aus den Elementen $x \in \mathbb{H} \times 0 \times 0$ und ist vierdimensional. Dieser Raum ist wegen der Dimensionen nach Satz 3.41 eine Gerade von T.

Die Bahn dieser Gerade unter der Gruppe $\mathrm{U}_3^\alpha\mathbb{H} \leq \exp\mathrm{ad}[T, T]$ besteht aus weiteren Geraden. Da $\mathrm{U}_3^\alpha\mathbb{H}$ transitiv auf der Menge der nicht-isotropen Vektoren wirkt und diese Menge dicht im Lie-Tripel-System liegt, sind alle Geraden bekannt. Folglich ist die Geradenstruktur eindeutig bestimmt. □

4.3.3 Zusammenfassung

4.35 Satz
Einfache, integrierbare Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$ vom Rang 3 haben Standardeinbettungen, die isomorph zu einer der folgenden Lie-Algebren sind:
$$\mathfrak{u}_4\mathbb{H}, \mathfrak{u}_4(\mathbb{H}, 1), \mathfrak{u}_4(\mathbb{H}, 2), \mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}.$$

Beweis. Nach Satz 4.24 kommen nur folgende Lie-Algebren als Standardeinbettung in Frage:

$$\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}, \mathfrak{so}_7(\mathbb{R},1), \mathfrak{so}_7(\mathbb{R},2), \mathfrak{u}_3\mathbb{H}, \mathfrak{u}_3(\mathbb{H},1), \mathfrak{u}_4^\alpha\mathbb{H}, \mathfrak{sl}_4\mathbb{C}, \mathfrak{sl}_3\mathbb{H}, \mathfrak{u}_4\mathbb{H}, \mathfrak{u}_4(\mathbb{H},1), \mathfrak{u}_4(\mathbb{H},2)$$

Zum Ausschluss der $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ verweisen wir auf Satz 4.26.
Zum Ausschluss der $\mathfrak{so}_7(\mathbb{R},r)$ verweisen wir auf Satz 4.25.
Zum Ausschluss der $\mathfrak{u}_3(\mathbb{H},r)$ und $\mathfrak{sl}_3\mathbb{H}$ verweisen wir auf Satz 4.23.
Zum Ausschluss der $\mathfrak{sl}_4\mathbb{C}$ verweisen wir auf Satz 4.27. □

Nun können wir den Klassifikationssatz für integrierbare, einfache Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$ formulieren:

4.36 Satz
Jede integrierbare, einfache Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ vom Rang 3 ist klassisch.

Beweis. Dies ist eine direkte Folgerung aus Satz 4.35, Satz 4.28 und Satz 4.34. □

4.4 Lie-Tripel-Geometrien höheren Ranges

Wir haben herausgefunden, dass alle integrierbaren Lie-Tripel-Geometrien über $\mathbb{H}$ vom Rang 3 klassisch oder vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$ sind. Diese Aussage wollen wir auf Lie-Tripel-Geometrien höheren Ranges verallgemeinern.

4.37 Satz
Jede integrierbare Lie-Tripel-Geometrie über $\mathbb{H}$ ist klassisch oder vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$.

Beweis. Die Lie-Tripel-Geometrie heiße T. Besitzt T einen Unterraum vom Rang 3 vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$, so verweisen wir auf Satz 3.90 und Satz 4.11.

Wir können nach Satz 3.90 und Satz 4.36 also annehmen, dass jeder Unterraum vom Rang 3 klassisch ist und müssen zeigen, dass es eine Sesquilinearform auf T gibt, die die passende Multiplikation induziert. Dazu definieren wir

$$\sigma(x,y) = \sigma_R(x,y)$$

wobei σ_R die zu einem beliebigen Unterraum $R \leq T$ vom Rang 3 gehörende Sesquilinearform ist.

Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit von σ. Zu $x, y \in T$ wählen wir zwei Unterräume $R, S \leq T$ vom Rang 3 mit $x, y \in R, S$. Wir müssen $\sigma_R(x,y) = \sigma_S(x,y)$ zeigen. Dazu betrachten wir die Einschränkungen von σ_R und σ_S auf eine Unterebene, die x und y enthält. Zu diesen Einschränkungen gehören klassische

Lie-Tripel-Geometrien. Nach Konstruktion sind diese identisch. Dem Beweis von Satz 3.60 entnehmen wir, dass die zugehörigen Sesquilinearformen nicht nur äquivalent, sondern ebenfalls identisch sein müssen.

Die Abbildung σ ist offensichtlich homogen in beiden Argumenten. Die Additivität zeigt man nacheinander für jeweils ein Argument. Hier ist sie klar, da σ auf Unterräumen vom Rang 3 mit einer (additiven) Sesquilinearformen übereinstimmt. $\square$

Wie auf Seite 23 für Lie-Tripel-Geometrien vom Rang 2 geben wir auch hier eine Liste der Lie-Tripel-Geometrien an. Wir beschränken uns auf Lie-Tripel-Geometrien vom Rang 3. Listen für andere Ränge wären entsprechend aufgebaut und sind mit den vorliegenden Resultaten problemlos erstellbar. Für die in den Tabellen genannten Bewegungsgruppen verweisen wir auf Satz 2.27, Satz 2.29 und Satz 2.34.

Raum vom Rang 3	Bewegungsgruppe Σ	$\dim\Sigma$
$M(\mathbb{H}, \kappa, 1, 1, 1, 1)$	$\mathrm{PU}_4\mathbb{H}$	36
$M(\mathbb{H}, \kappa, 1, 1, 1, -1)$	$\mathrm{PU}_4(\mathbb{H}, 1)$	36
$M(\mathbb{H}, \kappa, 1, 1, -1, -1)$	$\mathrm{PU}_4(\mathbb{H}, 2)$	36
$M(\mathbb{H}, \kappa, 1, -1, -1, -1)$	$\mathrm{PU}_4(\mathbb{H}, 1)$	36
$M(\mathbb{H}, \kappa, 1, 1, 1, 0)$	$\mathrm{PU}_3\mathbb{H} \ltimes \mathbb{H}^3$	33
$M(\mathbb{H}, \kappa, 1, 1, -1, 0)$	$\mathrm{PU}_3(\mathbb{H}, 1) \ltimes \mathbb{H}^3$	33
$M(\mathbb{H}, \kappa, 1, -1, -1, 0)$	$\mathrm{PU}_3(\mathbb{H}, 1) \ltimes \mathbb{H}^3$	33
$M(\mathbb{H}, \kappa, 1, 1, 0, 0)$	$\mathrm{PU}_2\mathbb{H} \ltimes \mathbb{H}^4$	26
$M(\mathbb{H}, \kappa, 1, -1, 0, 0)$	$\mathrm{PU}_2(\mathbb{H}, 1) \ltimes \mathbb{H}^4$	26
$M(\mathbb{H}, \kappa, 1, 0, 0, 0)$	$\mathbb{H}^3$	12
$M(\mathbb{H}, \kappa_i, 1, 1, 1, 1)$	U_4^α	28
$M(\mathbb{H}, \kappa_i, 1, 1, 1, 0)$	$\mathrm{U}_3^\alpha \ltimes \mathbb{H}^3$	27
$M(\mathbb{H}, \kappa_i, 1, 1, 0, 0)$	$\mathrm{U}_2^\alpha \ltimes \mathbb{H}^4$	22
Typ $(R+)$, Rang 3	$(\mathrm{Spin}_4\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{H}^4$	23
Typ $(R-)$, Rang 3	$(\mathrm{SL}_2\mathbb{C} \cdot \mathrm{SO}_2\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{H}^4$	23

Raum vom Rang 3	Bewegungsgruppe Σ	$\dim\Sigma$
$M(\mathbb{C},\kappa,1,1,1,1)$	$\mathrm{PSU}_4\mathbb{C}$	15
$M(\mathbb{C},\kappa,1,1,1,-1)$	$\mathrm{PSU}_4(\mathbb{C},1)$	15
$M(\mathbb{C},\kappa,1,1,-1,-1)$	$\mathrm{PSU}_4(\mathbb{C},2)$	15
$M(\mathbb{C},\kappa,1,-1,-1,-1)$	$\mathrm{PSU}_4(\mathbb{C},1)$	15
$M(\mathbb{C},\kappa,1,1,1,0)$	$\mathrm{PSU}_3\mathbb{C}\ltimes\mathbb{C}^3$	14
$M(\mathbb{C},\kappa,1,1,-1,0)$	$\mathrm{PSU}_3(\mathbb{C},1)\ltimes\mathbb{C}^3$	14
$M(\mathbb{C},\kappa,1,-1,-1,0)$	$\mathrm{PSU}_3(\mathbb{C},1)\ltimes\mathbb{C}^3$	14
$M(\mathbb{C},\kappa,1,1,0,0)$	$\mathrm{PSU}_2\mathbb{C}\ltimes\mathbb{C}^4$	11
$M(\mathbb{C},\kappa,1,-1,0,0)$	$\mathrm{PSU}_2(\mathbb{C},1)\ltimes\mathbb{C}^4$	11
$M(\mathbb{C},\kappa,1,0,0,0)$	$\mathbb{C}^3$	6
$M(\mathbb{C},\mathrm{id},1,1,1,1)$	$\mathrm{SO}_4\mathbb{C}$	12
$M(\mathbb{C},\mathrm{id},1,1,1,0)$	$\mathrm{SO}_3\mathbb{C}\ltimes\mathbb{C}^3$	12
$M(\mathbb{C},\mathrm{id},1,1,0,0)$	$\mathrm{SO}_2\mathbb{C}\ltimes\mathbb{C}^4$	10

Raum vom Rang 3	Bewegungsgruppe Σ	$\dim\Sigma$
$M(\mathbb{R},\kappa,1,1,1,1)$	$\mathrm{PSO}_4\mathbb{R}$	6
$M(\mathbb{R},\kappa,1,1,1,-1)$	$\mathrm{PSO}_4^+(\mathbb{R},1)$	6
$M(\mathbb{R},\kappa,1,1,-1,-1)$	$\mathrm{PSO}_4^+(\mathbb{R},2)$	6
$M(\mathbb{R},\kappa,1,-1,-1,-1)$	$\mathrm{PSO}_4^+(\mathbb{R},1)$	6
$M(\mathbb{R},\kappa,1,1,1,0)$	$\mathrm{PSO}_3\mathbb{R}\ltimes\mathbb{R}^3$	6
$M(\mathbb{R},\kappa,1,1,-1,0)$	$\mathrm{PSO}_3^+(\mathbb{R},1)\ltimes\mathbb{R}^3$	6
$M(\mathbb{R},\kappa,1,-1,-1,0)$	$\mathrm{PSO}_3^+(\mathbb{R},1)\ltimes\mathbb{R}^3$	6
$M(\mathbb{R},\kappa,1,1,0,0)$	$\mathrm{PSO}_2\mathbb{R}\ltimes\mathbb{R}^4$	5
$M(\mathbb{R},\kappa,1,-1,0,0)$	$\mathrm{PSO}_2(\mathbb{R},1)\ltimes\mathbb{R}^4$	5
$M(\mathbb{R},\kappa,1,0,0,0)$	$\mathbb{R}^3$	3

4.5 Symmetrische stabile Räume

Wir kommen zum in dem Titel unserer Arbeit genannten Resultat, der Klassifikation symmetrischer stabiler Räume. Das Resultat für symmetrische Ebenen findet sich in Satz 2.31.

4.38 Satz
Jeder zusammenhängende symmetrische stabile Raum vom Rang mindestens 3 ist klassisch oder vom Typ $(R+)$ bzw. $(R-)$.

Beweis. Die tangentialen Lie-Tripel-Geometrien sind in Satz 4.37 klassifiziert. Nach Satz 3.46 sind zugehörige symmetrische stabile Räume starr. □

Es verbleibt der unzusammenhängende Fall. Durch die bekannte Klassifikation der symmetrischen Ebenen ist der Satz recht einfach.

4.39 Satz
Jeder symmetrische stabile Raum vom Rang mindestens 3 ist vom Typ $(R+)$ oder $(R-)$ oder klassisch oder ist die Vereinigung der klassischen Räume M_f und M_{-f} mit einer hermiteschen Sesquilinearform f.

Beweis. Für zusammenhängende symmetrische stabile Räume zitieren wir Satz 4.38.

Ein symmetrischer stabiler Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn diese Eigenschaft für alle Unterebenen erfüllt ist. Wir können also annehmen, dass der Raum unzusammenhängende Unterebenen hat. Wegen Satz 2.32 sind die unzusammenhängenden Ebenen isomorph zu einer Vereinigung von $\mathrm{EH}_2\mathbb{K}$ und $\mathrm{IH}_2\mathbb{K}$ oder isomorph zu einer Vereinigung von zwei Kopien von $M(\mathbb{K}, \kappa, 1, -1, 0)$ — jeweils mit passendem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{K}\}$. Diese Unterebenen besitzen jeweils genau zwei Zusammenhangskomponenten. Die Ränder dieser Komponenten in den Unterebenen sind identisch. Aus Stetigkeitsgründen sind somit die Ränder der Zusammenhangskomponenten des symmetrischen stabilen Raumes identisch.

Da symmetrische stabile Räume vom Typ $(R+)$ und $(R-)$ dicht im projektiven Raum liegen, sind die Zusammenhangskomponenten eines unzusammenhängenden Raumes klassisch. Die Gleichheit der Ränder ergibt nun die Vereinigung aus der Behauptung. □

Literatur

[1] Artin, E.: Geometric Algebra, Interscience Publishers, New York, 1957.

[2] Bourbaki, N.: Eléments de mathématique, Algèbre, Chapitre 9, Hermann, Paris (1959).

[3] Dieudonné, J.: La géometrie des groupes classique, Springer-Verlag (1963).

[4] Ebbinghaus, H.-D., H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, R. Remmert: *Zahlen*, Springer-Verlag (1983).

[5] Groh, H.: *Embedding geometric lattices with topology*, J. Combin. Theory Ser. A 42, 126–136 (1986).

[6] Grundhöfer, T., R. Löwen: *Linear topological geometries*, in: Buekenhout, F.: *Handbook of incidence geometry*, Elsevier Science (1995).

[7] Hein, W.: *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*, Springer (1990).

[8] Hermes, H.: *Einführung in die Verbandstheorie*, 2. Auflage, Springer-Verlag (1967).

[9] Hilgert, J., K.-H. Neeb: *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*, Vieweg (1991).

[10] Klein, H.: *Räumliche topologische Geometrien*, Dissertation, Kiel (1992).

[11] Knapp, A. W.: *Lie Groups beyond an introduction*, Birkhäuser (1996).

[12] Kubiak, H.: *Äquivariante Einbettungen und Klassifikation symmetrischer Ebenen*, Diplomarbeit, Braunschweig (2002).

[13] Lister, W. G.: *A structure theory of Lie triple systems*, Trans. Amer. Math. Soc. 72, 217–242 (1952).

[14] Löwe, H.: *A rough classification of symmetric planes*, Adv. Geom. 1, 1–21 (2001).

[15] Löwe, H.: *Symmetric planes with non-classical tangent translation planes*, Geom. Dedicata 58, No. 1, 45–51 (1995).

[16] Löwe, H.: *Zerfallende symmetrische Ebenen mit großem Radikal*, Dissertation, Braunschweig (1994).

[17] Löwe, H.: *The Classification of Connected Symmetric Planes*, Habilitationsschrift, Braunschweig (2000).

[18] Löwen, R.: *Symmetric Planes*, Pac. J. Math. 84, 367–390 (1979).

[19] Löwen, R.: *A local "Fundamental Theorem" for classical topological projective Spaces*, Arch. Math. 38, 286–288 (1982).

[20] Loos, O.: *Symmetric spaces I: General Theory*, W. A. Benjamin (1969).

[21] Loos, O.: *Symmetric spaces II: Compact Spaces and Classification*, W. A. Benjamin (1969).

[22] Matsumoto, H.: *Quelques remarques sur les groupes de Lie algébriques réels*, J. Math. Soc. Japan 16, 419–446 (1964).

[23] Onishchik, A. L., Vinberg, E. B.: *Lie Groups and Lie Algebras III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 41, Springer (1994).

[24] Salzmann, H., D. Betten, T. Grundhöfer, H. Hähl, R. Löwen, M. Stroppel: *Compact projective planes*, de Gruyter (1995).

[25] Tits, J.: *Tabellen zu den einfachen Lie-Gruppen und ihren Darstellungen*, Lecture Notes in Mathematics 40, Springer (1967).